2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１６２０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４００５５
研究課題名（和文）完全可積分系とその退化の幾何学

研究課題名（英文）Geometry of completely integrable systems and their degenerations

研究代表者
野原　雄一（Nohara, Yuichi）

香川大学・教育学部・准教授

研究者番号：６０４４７１２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：　2次元部分空間のなすグラスマン多様体上には、ある種のグラフを選ぶごとに完全可積分系を構成できる。これをトーリック退化させることにより、ラグランジュトーラスファイバーに対するポテンシャル関数を計算した。異なるグラフに対応するポテンシャル関数はある変数変換で結びついており、完全可積分系の像である凸多面体たちはその“トロピカル化”で移りあっている。
　旗多様体上のGelfand-Cetlin系にはトーラスではないラグランジュファイバーが存在する。3次元完備旗多様体と4次元ベクトル空間内の2次元部分空間全体のなすグラスマン多様体の場合に、非トーラスファイバーのFloerコホモロジーを計算した。

研究成果の概要（英文）：We construct a completely integrable system on the Grassmannian of two-planes in an n-space associated with any trivalent tree with n leaves, and compute the potential function for its Lagrangian torus fiber by using its toric degeneration. The potential functions for different trees are related by a rational coordinate change, and the corresponding moment polytopes are related by its "tropicalization".
The Gelfand-Cetlin system has non-torus Lagrangian fibers on some of the boundary strata of the moment polytope. We compute Floer cohomologies of such non-torus Lagrangian fibers in the cases of the three-dimensional full flag manifold and the Grassmannian of two-planes in a four-space.

研究分野：幾何学

キーワード：完全可積分系　フレアー理論

１．研究開始当初の背景

完全可積分系とは、シンプレクティック多様体上の関数の組で、一般の等位集合（ユークリッド空間への写像と見たときのファイバー）がラグランジュ部分多様体となるもののことを指すものとする。完全可積分系の一般のコンパクトファイバーは必ずトーラスになる（Arnold-Liouville の定理）。

完全可積分系を考える動機の一つにミラー対称性がある。ミラー対称性とは、ある多様体上のシンプレクティック幾何と、もう一つの多様体（ミラー対）上の複素幾何の双対性のことである。一方が Fano 多様体とよばれるクラスの空間の場合、そのミラー対は非コンパクト多様体とその上の正則関数（スーパーポテンシャル）の組となる。ミラー対称性はラグランジュトーラスファイブレーション（その特別な場合が完全可積分系）を通して理解できると考えられている（SYZ 予想）が、ほとんどの場合に特異ファイバーを持つため、解決すべき問題は多い。

完全可積分系の様子がよく分かる例の一つにトーリック多様体のトーラス作用の運動量写像がある。トーリック多様体上の様々な量は運動量写像の像である凸多面体を用いて組み合わせ論的に記述され、ミラー対称性も非常に深いレベルで理解されている（深谷-Oh-太田-小野）。

一方、A 型の旗多様体（一般にトーリック多様体ではない）には Gelfand-Cetlin 系とよばれる完全可積分系が存在し、トーリック多様体の場合とよく似た性質を持っていることが知られている。そこで、旗多様体のトーリック多様体への退化族を用いて Gelfand-Cetlin 系から運動量写像への変形（完全可積分系のトーリック退化）を構成し、それを用いてポテンシャル関数とよばれる Floer 理論的な量を計算した。これは代数トーラス上の Laurent 多項式となり、旗多様体のミラー対として知られているものに一致している（西納-野原-植田）。

２．研究の目的

上で述べたトーリック退化を用いて完全可積分系を調べる方法は、より一般の場合にも有効である。本研究では、表現論やゲージ理論など他の分野とも深く関わる以下の場合を中心に完全可積分系とその退化について研究する。

- 旗多様体（特にグラスマン多様体）上の Gelfand-Cetlin 系とは限らない完全可積分系
- 多角形空間、すなわち 3 次元ユークリッド空間内の多角形のモジュライ空間上の bending Hamiltonian
- リーマン面上のベクトル束のモジュライ空間上の Goldman 系
- カラビ・ヤウ多様体（特に複素 2 次元の場合）上の特殊ラグランジュファイバー束

これらの完全可積分系の Floer 理論的な性質について調べるとともに、代数幾何や表現論、ミラー対称性からの研究で得られている結果との関係も明らかにすることを目指す。

３．研究の方法

多様体をトーリック多様体などの完全可積分系の構造がよく分かっている空間に退化させることにより、元の空間上の完全可積分系を考察する。特に、グラスマン多様体、多角形空間、ベクトル束のモジュライ空間に対しては以下の問題を考える。

(1) 多角形空間は 2 次元部分空間のなすグラスマン多様体の商（シンプレクティック簡約、もしくは GIT 商）として得られるため、多角形空間上の完全可積分系を用いることでグラスマン多様体上に複数の完全可積分系を構成することができる。異なる完全可積分系の間の関係と、それぞれに対応するポテンシャル関数（ミラー対）の変換則を調べる。

(2) リーマン面上の放物的ベクトル束のモジュライ空間は、放物的ウエイトとよばれるパラメータを選ぶごとに定義される。リーマン面が射影直線（2 次元球面）で階数が 2 のの場合には、このモジュライ空間は 3 次元球面内の多角形のモジュライ空間と同一視することができる（このとき放物的ウエイトは多角形の辺の長さに対応する）。特に放物的ウエイト（すなわち辺の長さ）が十分小さい場合には、この空間はユークリッド空間内の多角形をパラメトライズする多角形空間とよく似ていると考えられる。そこで、ベクトル束のモジュライ空間上の Goldman 系と多角形空間上の bending Hamiltonian の関係を明らかにすることで、Goldman 系の幾何学を調べる。

４．研究成果

(1) Fano 多様体をトーリック多様体へ退化させることにより、稠密な開集合上に完全可積分系を構成できることを示した。さらに、退化したトーリック多様体が“良い”特異点のみを持っている場合に、その完全可積分系に対するポテンシャル関数の公式を与えた（西納武男氏、植田一石氏との共同研究）。その例として、種数 2 のリーマン面上の階数 2 のベクトル束のモジュライ空間の場合を計算した。

(2) n 次元複素ベクトル空間内の 2 次元部分空間のなすグラスマン多様体 Gr(2,n) のトーリック退化はある種のグラフと一対一に対応することが知られている（Speyer-Sturmfels）。一方、上で述べた Gr(2,n)上の完全可積分系たちも同じクラスのグラフから決まっており、対応するトーリック退化でトーリック多様体上の運動量写像に変形することがで

きる。これを用いて正則円盤の数え上げを行い、各完全可積分系に対するポテンシャル関数を計算した。さらに、異なる完全可積分系に対し、対応するポテンシャル関数をつなぐ座標変換を構成し、その“トロピカル化”として得られる区分的線形写像が完全可積分系の像である凸多面体たちを写し合うことを示した。（植田一石氏との共同研究）

(3) 射影直線上の階数2の放物的ベクトル束のモジュライ空間は、放物的ウエイトの取り方により異なる空間になる。そこで、放物的ベクトル束のモジュライ空間の構造と、放物的ウエイトが変化したときのモジュライ空間の“壁越え”の様子を具体的に記述し、放物的ウエイトがある程度小さい場合に多角形空間と同一視できることを示した。さらにその場合に、放物的ベクトル束のモジュライ空間上の Goldman 系が多角形空間上の bending Hamiltonian たちと同一視できることも証明した。この証明には quasi-Hamiltonian space （群値運動量写像）の理論を用いており、以前の研究で与えた証明より精密なものとなっている。

(4) トーリック多様体の場合とは異なり、旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系はトーラスではないラグランジュ多様体をファイバーとして持っている。これらはトーリック退化でつぶれてしまう部分であり、Gelfand-Cetlin 系に対するポテンシャル関数からもこれらの情報を引き出すことはできない。一方、旗多様体のミラー対は単なる代数的トーラスではなく、その部分コンパクト化を考える必要があることが知られている。ここで付け加えられるものに対応する旗多様体側の対象が非トーラスファイバーであると期待するのは自然なことだと思われる。そこで、3 次元旗多様体および 4 次元、6 次元グラスマン多様体 Gr(2,4), Gr(2,5)の場合に、非トーラスラグランジュファイバーの Floer コホモロジーを計算し、それがミラー対称性の結果と整合的であることを示した（植田一石氏との共同研究）。ラグランジュ部分多様体に対する Floer コホモロジーは一般に具体的な計算が困難であるため、この結果は Floer コホモロジーの計算例としても意義のあるものだと考えられる。

(4)の非トーラスファイバーに対する Floer コホモロジーの計算は当初の研究計画にはなかったものであるが、トーリック多様体以外のより一般の多様体上の完全可積分系や、旗多様体のミラー対称性の理解のための重要な例となるため、この研究を優先することとした。

旗多様体のミラー対称性に関しては、代数幾何や表現論など様々なアプローチからの研究がある。Fano 多様体内のラグランジュトーラスのみから見える“ミラー対”は代数トーラスとなり、トーリック多様体の場合はこれで正しいものが得られるが、旗多様体の場合はその部分コンパクト化が必要になる。シンプレクティック幾何でそれに対応すると考えられる現象が、(2)のポテンシャル関数の間の座標変換に関する結果や(4)の非トーラスファイバーに関する結果であると考えられる。代数幾何や表現論からの結果をシンプレクティック幾何から理解することが今後の課題となる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　7 件）

1. Y. Nohara and K. Ueda, Floer cohomologies of non-torus fbers of the Gelfand-Cetlin system, to appear in J. Symp. Geom., 査読有
2. Y. Nohara and K. Ueda, Goldman systems and bending systems, to appear in Canad. J. Math., 査読有, http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2015-004-2
3. Y. Nohara and K. Ueda, Floer homology for the Gelfand-Cetlin system, in “Real and Complex Submanifolds”, ed. Y.-J, Suh et. al., Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 106 (2014), 427-436.
4. Y. Nohara and K. Ueda, Toric degenerations of integrable systems on Grassmannians and polygon spaces, Nagoya Math. J. 214 (2014), 125-168, 査読有, https://projecteuclid.org/euclid.nmj/1393855952
5. T. Nishinou, Y. Nohara, and K. Ueda, Potential functions via toric degenerations, Proc. Japan Acad. 88 Ser. A (2012), 31-33, 査読有, doi: 10.3792/pjaa.88.31

〔学会発表〕（計 15 件）

1. Y. Nohara, Floer homology for the Gelfand-Cetlin system, 2014 ICM Satellite Conference on Real and Complex Submanifolds, NIMS (Daejeon, Korea), 2014 年 8 月 10 日
2. 野原雄一, Floer cohomologies of non-torus fibers of the Gelfand-Cetlin system, 第 61 回トポロジーシンポジウム, 東北大学（仙台市）, 2014 年 7 月 28 日
3. Y. Nohara, Floer Cohomologies of Nontorus Fibers of the Gelfand-Cetlin System, NCTS(South) Geometry Conference “MAthematics New Goals”, National Cheng Kung University

(Taiwan), 2014 年 7 月 2 日
4. Y. Nohara, Toric degenerations of integrable systems on Grassmannians and potential functions, Oberwolfach Workshop Okounkov Bodies and Applications, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Oberwolfach, Germany), 2014 年 5 月 27 日
5. 野原雄一, Integrable systems on Grassmannians and potential functions, 研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」, 高知市文化プラザかるぽーと（高知県高知市）, 2014 年 1 月 9 日
6. 野原雄一, On non-torus fibers of the Gelfand-Cetlin system, 研究集会「ミラー対称性の展望」, 京都大学数理解析研究所（京都市）, 2013 年 12 月 25 日
7. Y. Nohara, Integrable systems on Grassmannians and potential functions, East Asian Symplectic Conference 2013 in KAGOSHIMA, 鹿児島大学(鹿児島市), 2013 年 9 月 21 日
8. 野原雄一, Integrable systems on Grassmannians and potential functions, 場の数理とトポロジー, 信州大学（松本市）, 2013 年 2 月 6 日
9. Y. Nohara, Integrable Systems on Moduli Spaces of Parabolic Bundles and Polygon Spaces, The eighth Chinese-Japan Friendship Conference on Differential Geometry, Sichuan University (Chengdu, China), 2012 年 9 月 11 日
10. Y. Nohara, Toric degenerations of Grassmannians and integrable systems, The 4th International School and Conference on Geometry and Quantization, Institute of Mathematics of Chinese Academy of Sciences (Beijing, China), 2011 年 9 月 7 日～9 日

〔その他〕
ホームページ等
香川大学研究者総覧詳細
http://www.ceda.kagawa-u.ac.jp/kudb/servlet/RefOutController?exeBO=WR4100RBO&monitorID=WR4100&workType=detail&primaryKey=1000028047&kyoinID=&gyosekiNendo=null&secondaryKey=&dummyKyoinID=&currentPage=4

６．研究組織
(1)研究代表者
野原　雄一（NOHARA YUICHI）
香川大学・教育学部・准教授
研究者番号：60447125