2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号：２２６０４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４００５７
研究課題名（和文）非平坦カラビ－ヤウ多様体内の特殊ラグランジュ部分多様体の研究

研究課題名（英文）Research on special Lagrangian submanifolds in non-flat Calabi-Yau manifolds

研究代表者
酒井　高司（SAKAI, Takashi）

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号：３０３８１４４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題ではCalabi-Yau多様体内の特殊Lagrange部分多様体に関する研究を行った．また，関連する話題としてLagrange部分多様体のFloerホモロジーとHamilton体積最小性に関する研究および極小部分多様体上の錐状特異点に関する研究を行った．
階数1のコンパクト型対称空間の余接束にはStenzelが構成した余等質性1の完備なRicci平坦Kahler計量が入る．このStenzel計量の対称性に着目し，運動量写像を用いた手法によって，球面の余接束内に余等質性1の特殊Lagrange部分多様体を構成し，特異点の様子および無限遠での漸近挙動を観察した．

研究成果の概要（英文）：We studied special Lagrangian submanifolds in Calabi-Yau manifolds. Moreover we investigated Floer homology and Hamiltonian volume minimizing properties of Lagrangian submanifolds, and we also investigated conical singularities on minimal submanifolds.
The cotangent bundles of compact rank one symmetric spaces admit complete Ricci flat Kahler metrics of cohomogeneity one due to M. Stenzel. Using the symmetry of the Stenzel metric, we constructed cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere by the moment map technique. Furthermore, we observed singularities and the asymptotic behavior of those special Lagrangian submanifolds.

研究分野：微分幾何学

キーワード：微分幾何　対称空間　Calabi-Yau多様体　Lagrange部分多様体　キャリブレーション　複素旗多様体　対蹠集合

１．研究開始当初の背景

対称空間でない単連結な既約 Riemann 多様体は，そのホロノミー群により 7 種類に分類され，特殊なホロノミー群として SU(n), Sp(n), Sp(n)・Sp(1), G_2, Spin(7)の５つが存在する．特に，ホロノミー群が特殊ユニタリ群 SU(n)の部分群になる Kahler 多様体をここでは広い意味で Calabi-Yau 多様体と呼ぶ．Calabi-Yau 多様体は Ricci 平坦な Kahler-Einstein 多様体になることから，微分幾何，代数幾何，複素幾何，シンプレクティック幾何，さらには数理物理とも深く関連しており，様々な観点から研究が進められている．

Harvey と Lawson はキャリブレーションを利用してホモロジー体積最小性をもつ部分多様体を構成する方法を与え，特殊ホロノミー群をもつ Riemann 多様体において，ホモロジー類内で体積最小となる部分多様体の例を数多く与えた．特に，複素 n 次元 Calabi-Yau 多様体の場合，複素体積形式の実部をとる n 次形式がキャリブレーションになり，これによってキャリブレートされる部分多様体を特殊 Lagrange 部分多様体と呼ぶ．複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体のミラー対称性に関する SYZ 予想により，理論物理との関係が指摘されて以降，特殊 Lagrange 部分多様体の研究が盛んに行われている．ここで重要なことは，特殊 Lagrange ファイブレーションには一般には特異点をもつファイバーが現れるということである．このため特殊 Lagrange 部分多様体上に現れる特異点を理解することが重要な課題となる．

２．研究の目的

本研究課題では特殊ホロノミー群をもつ Riemann 多様体のキャリブレート部分多様体について研究を行った．特に，平坦とは限らない Calabi-Yau 多様体内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成し，その幾何学的性質と特異点の様子を調べることを目的とした．

これまでの先行研究により，現在では特殊 Lagrange 部分多様体の例がある程度豊富に得られている．たとえば，Harvey と Lawson は R^n の austere 部分多様体の余法束が余接束 $T^*R^n=C^n$ 内の特殊 Lagrange 部分多様体になることを示した．後に，Joyce は運動量写像や可積分系など様々な手法を用いて C^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体の例を数多く構成した．また，Haskins は C^3 内の特殊 Lagrange 錐について研究を行っている．しかし，これまでの研究の多くは複素 Euclid 空間 C^n 内で行われていた．C^n は Calabi-Yau 多様体の重要な例であると言えるが，平坦であり，そのホロノミー群は自明になる．本研究課題ではホロノミー群が SU(n)と一致するような，Calabi-Yau 多様体において特殊 Lagrange 部分多様体の幾何学を研究することを目的とした．Calabi-Yau 多様体の複素体積形式は U(1)を作用させても再び複素体積形式になるので，特殊 Lagrange キャリブレーションは S^1 族で定義される．複素 Euclid 空間 C^n の場合は，この S^1 の位相が異なる 2 つのキャリブレーションがユニタリ群 U(n)の作用で互いに移り合ってしまうので，位相の違いは現れないが，一般の平坦でない Calabi-Yau 多様体の場合には位相の違いが関わってくることが本質的に異なる点である．

特殊ホロノミー群をもつ Riemann 多様体には他にも超 Kahler 多様体の特殊 Lagrange 部分多様体，G_2 多様体の associative 部分多様体および coassociative 部分多様体，Spin(7) 多様体の Caylay 部分多様体といったキャリブレート部分多様体が考えられる．運動量写像を用いる方法や余法束の方法などを用いて，これらのキャリブレート部分多様体の幾何学ついて研究を行うことを目的とした．

特殊 Lagrange 部分多様体に限らず，一般に極小部分多様体上には特異点が現れる．本研究課題では，これらの特異点を調べる目的で，その接モデルとなる接錐の面積最小性について研究を行った．また，関連する話題として等質 Kahler 多様体の Lagrange 部分多様体の交叉理論と Floer ホモロジーの研究を行った．さらに，その応用として Lagrange 部分多様体の Hamilton 体積最小性に関する研究を行った．

３．研究の方法

Yau による Calabi 予想の解決の後，興味深い Calabi-Yau 多様体の例が与えられている．たとえば，Stenzel は階数１のコンパクト型対称空間 G/K の余接束上にコンパクト Lie 群 G が余等質性１で作用することに着目し，Kahler 計量が Ricci 平坦になるための Monge-Ampere 方程式を常微分方程式に帰着させることにより，この上に G 不変な余等質性１の Calabi-Yau 計量を構成した．特に，2 次元球面の余接束 T^*S^2 の場合，Stenzel 計量は Eguchi-Hanson による超 Kahler 計量と一致する．このように対称性の高い Calabi-Yau 多様体に対して次のような方法で特殊 Lagrange 部分多様体の構成を行い，その幾何学的な性質を調べることができる．まず，一つ目は余法束の方法である． C^n における Havery と Lawson の結果の類似として，Karigiannis と Min-Oo は球面 S^n 内の austere 部分多様体の余法束が余接束 T^*S^n の特殊 Lagrange 部分多様体になることを示している．もう一つ方法として，運動量写像を用いて余等質性１の Lagrange 部分多様体を構成することができる．さらに，この Lagrange 部分多様体が特殊 Lagrange 部分多様体になるための条件はある常微分方程式によって与えられる．したがって，この常微分方程式の解の相空間を解析することにより，特殊 Lagrange 部分多様体の特異点の様子と無限遠での漸近挙動を調べることができる．

４．研究成果

(1) 本研究課題では Calabi-Yau 多様体内の特殊 Lagrange 部分多様体に関する研究を行った．階数１のコンパクト型対称空間の余接束には Stenzel が構成した余等質性１の完備な Ricci 平坦 Kahler 計量が入る．この Stenzel 計量の対称性に着目し，運動量写像を用いた手法によって，n 次元球面の余接束内に $SO(p)\times SO(q)$ $(p+q=n+1)$の作用で不変な余等質性 1 の Lagrange 部分多様体を構成した．このとき，これらの Lagrange 部分多様体が特殊 Lagrange 部分多様体になるための条件は常微分方程式によって記述できる．ここで得られた常微分方程式は一般には特異点をもち，これが特殊 Lagrange 部分多様体の特異点に対応している．さらに，特異点を通る解を滑らかな解に連続的に変形することができる．これにより特異点をもつ特殊 Lagrange 部分多様体が連続的な変形で smoothing される様子を観測することができる．特に $SO(p)\times SO(q)$が abelian である場合，すなわち $p=q=2$ または $p=1,q=2$ のとき，球面の余接束に特殊 Lagrange 部分多様体による foliation が構成される．ただし，このとき特異点をもつ leaf が現れる．また，特殊 Lagrange キャリブレーションの S^1 族の位相を変えることにより，特殊 Lagrange 部分多様体の族の変形を与えることができる．

球面の余接束上の Stenzel 計量の極限として，複素錐上に Calabi-Yau 錐計量が得られる．球面の余接束内の $SO(p)\times SO(q)$の作用で不変な余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体の中でコンパクトなものは零切断に限る．さらに，零切断以外の特殊 Lagrange 部分多様体は無限遠において Calabi-Yau 錐内の特殊 Lagrange 部分多様体に漸近することが分かる．以上の結果は橋本要氏（大阪市立大学）との共同研究で得られた．

複素錐は球面の余接束から零切断を除いた開部分多様体と同一視される．この同一視により，球面内の部分多様体の余法束が複素錐の Lagrange 部分多様体になることを示した．さらに，この余法束が特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は，もとの球面内の部分多様体が austere 部分多様体であることを示した．これは Harvey-Lawson および Karigiannis と Min-Oo による余接束特殊 Lagrange 部分多様体の構成の類似になる．

(2) Kahler 多様体において対合的反正則等長変換の不動点集合として与えられる部分多様体を実形と呼ぶ．定義から実形は全測地的 Lagrange 部分多様体になる．連結コンパクト半単純 Lie 群 G の随伴軌道には G 不変な Kahler 構造が入り，複素旗多様体と呼ばれる．複素旗多様体に対して，ある自然数 k_0 が定まり，k_0 以上の任意の整数 k に対して，複素旗多様体には k 対称空間の構造が入る．この k 点対称を用いて，複素旗多様体に一般化された対蹠集合を定義することができる．k 点対称による不動点集合を決定し，複素旗多様体の極大対蹠集合が Weyl 群の軌道になることを示した．特に，すべての極大対蹠集合は G の作用によって互いに合同であることが分かる．さらに，複素ベクトル空間内の複素部分空間の列のなす複素旗多様体において，2 つの実旗多様体の交叉を決定し，横断的に交わるならば交叉は極大対蹠集合になることを示した．

一般にコンパクト型の Hermite 対称空間において互いに合同とは限らない 2 つの実形が横断的に交わるならば，その交叉は 2 つの実形の対蹠集合になることが田中-田崎により示されている．2 つの実形は全測地的であるから，交点における点対称によって共に不変であり，さらに交叉が対蹠集合であることから，すべての交点はこの点対称による不動点になる．したがって，点対称の作用から，J-holomorphic strip のモジュライ空間に自由な Z_2 作用が誘導される．よって，Z_2 係数の Floer 鎖複体の境界作用素は 0 になる．これにより，単調なコンパクト型 Hermite 対称空間において，最小 Maslov 数が 3 以上であるような 2 つの実形の組に対する Z_2 係数 Floer ホモロジーは 2 つの実形の交叉によって生成されることを示した．これにより特に、既約なコンパクト型 Hermite 対称空間の場合に Arnold-Givental 不等式の一般化が得られた．さらに，その応用として，複素二次超曲面内の実形の Hamilton 変形の下での体積の下からの評価を与えた．特に複素二次超曲面に実形として埋め込まれている球面は Hamilton 体積最小であることを示した．以上の結果は入江博氏（東京電機大学），田崎博之氏（筑波大学）との共同研究で得られた．

(3) 面積最小部分多様体上の特異点を調べるために，最も単純な特異点である錐状特異点の接モデルとなる接錐について研究を行った．広橋-菅野-田崎は制限ルート系を用いて面積非増加レトラクションを構成することにより，B 型の制限ルート系を持つ対称対の線形イソトロピー表現の軌道として得られる対称 R 空間上の錐のいくつかが面積最小となることを示した．ここでのレトラクションの構成法は孤立軌道上の錐に対してしか適用できなかったが，これを拡張し，すべての極小 R 空間上の錐に対するレトラクションの構成法を与えた．これにより面積非増加レトラクションを具体的に構成することによって，階数 2 の既約コンパクト対称空間の線形イソトロピー表現の特異軌道上の錐がいくつかの例外を除いて面積最小になることを示した．さらに，ここで得られた面積最小錐の積が再び面積最小になるための十分条件を与えた．この結果は大野晋司氏（首都大学東京）との共同研究による．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計５件）

[1] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold, Advanced Studies in Pure Mathematics. 掲載決定, 査読有

[2] 入江 博, 酒井 高司, 田崎 博之「複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造」数理解析研究所講究録 **1880** (2014), 100―116. 査読無
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1880-07.pdf

[3] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan **65**, No. 4, (2013), 1135―1151. 査読有
DOI: 10.2969/jmsj/06541135

[4] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Antipodal structure of the intersection of real forms in a complex flag manifold, Proceedings of the 16th International Workshop on Differential Geometry and the 5th KNUGRG-OCAMI Differential Geometry Workshop Vol. 16, (2012), 97―105.
査読無

[5] K. Hashimoto and T. Sakai, Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere, Tohoku Math. J. **64**, No. 1 (2012), 141―169. 査読有
DOI: 10.2748/tmj/1332767344

〔学会発表〕（計１４件）

[1] 酒井高司, 大野晋司「極小 R 空間上の面積最小錐」日本数学会 2014 年度年会, 学習院大学, 東京都豊島区, 2014 年 3 月 15 日

[2] T. Sakai, Antipodal structure of the intersection of real forms and its applications, Differential Geometry Seminar, California University, Irvine, USA, March 11, 2014.

[3] T. Sakai, Minimal submanifolds in Riemannian manifolds, Mini-courses on area-minimizing varieties, Korea Institute for Advanced Study, Seoul, Republic of Korea, February 17―18, 2014.

[4] 酒井高司「複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造」部分多様体の微分幾何学の深化, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市, 2013 年 6 月 25 日

[5] 酒井高司「Special Lagrangian submanifolds with large symmetry」GCOE 小研究集会―Minimal submanifolds and mean curvature flow―, KKR 蔵王白銀荘, 山形県山形市, 2013 年 3 月 18 日

[6] T. Sakai, Antipodal structure of the intersection of real forms in a complex flag manifold, The 16th International Workshop on Differential Geometry, Kyungpook National University, Taegu, Republic of Korea, November 1―3, 2012.

[7] 酒井高司「複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造」幾何学セミナー, 首都大学東京, 東京都八王子市, 2012 年 10 月 12 日

[8] 入江博, 酒井高司, 田崎博之「複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造」日本数学会秋季総合分科会, 九州大学, 福岡県福岡市, 2012 年 9 月 18 日

[9] 酒井高司「複素旗多様体の実形の交叉の対蹠性」幾何学セミナー, 明治大学, 神奈川県川崎市, 2012 年 7 月 26 日

[10] 酒井高司「複素二次超曲面の実形の Hamilton 体積最小性について」シンプレクティック幾何と平均曲率流, KKR 蔵王白銀荘, 山形県山形市, 2012 年 3 月 23 日

[11] T. Sakai, Lagrangian Floer homology and its application to Hamiltonian volume minimizing property, The 4th TIMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, March 17―19, 2012.

[12] 酒井高司「複素二次超曲面の実形の Hamilton 体積最小性について」部分多様体論・湯沢 2011, 湯沢グランドホテル, 新潟県南魚沼郡湯沢町, 2011 年 11 月 25 日

[13] 酒井高司「球面の余接束内の特殊 Lagrange 部分多様体」部分多様体幾何とリー群作用, 東京理科大学森戸記念館, 東京都新宿区, 2011 年 9 月 3 日

[14] 酒井高司「球面の余接束内の余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体」談話会, 東京理科大学理工学部数学科, 千葉県野田市, 2011 年 6 月 20 日

〔その他〕
ホームページ等
http://www.comp.tmu.ac.jp/tsakai/

６．研究組織

(1)研究代表者

酒井　高司（SAKAI，Takashi）
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号：３０３８１４４５