

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：32670

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740059

研究課題名(和文) トーラス束によるリーマン・ロッホ数の局所化の研究とその応用

研究課題名(英文) Localization of Riemann-Roch number via torus bundles and its application

研究代表者

藤田 玄 (FUJITA, Hajime)

日本女子大学・理学部・講師

研究者番号：50512159

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円、(間接経費) 690,000円

研究成果の概要(和文)：本課題の主な研究成果は以下の3点である。

1. トーラス束の族とそのファイバーに沿った摂動による局所指数理論の定式化の論文とその応用としてのトーラス作用に対する量子化予想の幾何学的な証明に関する論文の大幅な改訂作業を経てComm. Math. Phys. への掲載に至った。2. 標準球面の余接束のコンパクト化の記述やシンプレクティックカットに関する指数の振る舞いを用いて測地流に由来する局所指数の計算を実行した。3. 1次元トーラス作用に関するある種の同変指数を定式化し、Braverman、Ma-Zhangらの横断的楕円型作用素の指数理論との差異や類似点に関する考察をし論文を執筆した。

研究成果の概要(英文)：Main results of this research are the following three.

1. We substantially revised the paper concerning a formulation of local index theory via torus bundles and a perturbation along the fibers. We also revised the paper concerning its application to a geometric proof of the quantization conjecture for Hamiltonian torus action. Both papers are accepted to Comm. Math. Phys.. 2. We computed the local index arising from the geodesic flow on the cotangent bundle of the standard sphere. In the computation we used the description of a compactification of the cotangent bundle and behavior of the local index under the symplectic cutting. 3. We gave a formulation of a kind of circle equivariant index. We investigated difference and similarity between our equivariant index and the theory of transverse index due to Braverman, Ma-Zhang, and we wrote a paper on the subject.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：Dirac型作用素の指数 指数の局所化 シンプレクティック幾何 同変指数

## 1. 研究開始当初の背景

多様体の幾何学的/位相的不変量がその多様体のある部分領域に局所化するという現象は幾何学の多くの場面で現れ、不変量の計算の観点から、また、理論的観点からも重要であり多くの研究と応用がなされてきた。例えば Witten は Dirac 型作用素を Clifford 積と反可換な線形写像で摂動することでコンパクトとは限らない Riemann 多様体上の位相的な性質をもつ指数理論を展開し、その枠組みで Poincaré-Hopf の定理、Lefschetz の固定点公式や Morse の不等式を指数の局所化の立場から再証明した。

シンプレクティック幾何においても Duistermaat-Heckman の公式のような局所化公式が知られており、種々の特性数の計算などに応用されていた。一方で、幾何学的量子化の偏極依存性の問題、Lagrange ファイバー束やトーリック多様体に対する Riemann-Roch 数に関係するいくつかの等式 (Danilov の定理など) は、群作用とは別の局所化現象の存在を示唆する。

これまでに古田幹雄氏(東大数理)と吉田尚彦氏(明治理工)との共同研究により、ある種のトラス束とそのファイバーに沿った Dirac 作用素による摂動を用いた開多様体上の指数理論を確立し、その一般論を用いてある種の完全可積分系に対する応用などを得ていた。

## 2. 研究の目的

これまでの研究をより整備し、シンプレクティック幾何学における不変量の局所化の現象をより幾何学的に、精密に理解する。具体的には、前量子化可能シンプレクティック多様体に付随する Dirac 型作用素の指数 (Riemann-Roch 数という) が適当な離散的な対象の数え上げに一致する、というタイプの等式を Dirac 型作用素の指数の局所化の現象として理解する。この種の Riemann-Roch 数が離散的対象の数え上げに一致するという現象はトーリック多様体や適当なクラスの Lagrange ファイバー束に対して成立することが知られているが、幾何学やトポロジーにおいて重要な対象である Riemann 面上の平坦接続のモジュライ空間や Grassmann 多様体/旗多様体上の可積分系の構造に対しても成立することが知られている。本研究では、そのような幾何学的に重要な対象への応用をも視野に入れ、さらにその応用を通じて他分野へのフィードバックも模索する。

また、既存の類似の理論、例えば Atiyah, Paradan-Vergne, Braverman, Ma-Zhang らによる横断的楕円型作用素の指数理論との関連も考察する。

## 3. 研究の方法

これまでに共同研究で確立してきた一般論をより広い対象に適用可能な形に深化させそれを応用する。本研究で考える一般論の具体的な設定は以下のものである。コンパクトとは限らない多様体とその上の Clifford 加群束を考える。多様体の端の開被覆とその各開集合上にある種のトラス束とそのファイバーに沿った Dirac 型作用素であって、ある種の整合性条件と非退化条件をもつものが存在したとする。初めに与えられた多様体上の Dirac 型作用素をそのファイバーに沿った Dirac 型作用素で摂動することで開多様体上の Fredholm 作用素が定義され解析的指数理論が構築される。この指数理論は変形不変性や切除公式などの位相的な性質をもち、その帰結として解析的指数のコンパクトな部分領域(の近傍)への局所化が得られる。さらにこの理論の枠組みで指数の積公式が得られている。積公式を適用することでさらに精度の高い局所化を得ることができる。

## 4. 研究成果

本課題の主な研究成果は以下の3点である。

トラス束の族とそのファイバーに沿った Dirac 型作用素による摂動を用いた解析的指数理論(局所指数理論)の定式化の論文、その応用としてのトラス作用に対する量子化予想の幾何学的な証明に関する論文の大幅な改訂作業を経て Comm. Math. Phys. への掲載に至った。特に、局所指数理論の定式化の論文の改訂作業を進める過程において、それまで用いていた複雑で技術的な仮定について吟味を行い、それらを簡略化することに成功した。この改訂作業の結果理論の全体像の見通しがよくなった。

標準球面の余接束の測地流に由来する局所指数の計算を実行した。この対象においては、余接束内の零切断が特異ファイバーとして現れ、その近傍に対して局所指数が定義される。我々はその値が1であることを示した。(ただし球面の次元が0の場合その値は2になる。) 計算の過程において、余接束のコンパクト化をある種の Grassmann 多様体として記述すること、ある種のシンプレクティックカットに関する指数の振る舞いを積公式から導くことがポイントとなる。球面の余接束は、Riemann 面上の平坦接続のモジュライ空間上の可積分系(特異 Lagrange ファイバー束)の構造に現れる球面型特異ファイバーの近傍の局所モデルとなっていることが期待されるので、モジュライ空間へ

の応用に向けて一步前進したといえる。これまでに整備した一般論の応用として、非コンパクトなシンプレクティック多様体上の1次元 Hamiltonian トーラス作用であって任意の格子点の運動量写像による逆像がコンパクトなものに対してある種の同変指数を定式化した。得られる同変指数は表現環上の汎関数となる。その同変指数に関する量子化予想の定式化と証明がこれまでの理論の応用として得られる。さらに、Braverman、Ma-Zhangらの横断的楕円型作用素の指数理論との差異や類似点に関する考察をした。運動量写像が固有で臨界点を持たない場合は両者がともに量子化予想を満たすことから二つの同変指数が一致することを Paris の Ma 氏から指摘された。しかし、両者は一般には異なる振る舞いを示すことが有限の長さのシリンダーに対する計算例を考えることでわかる。この違いは、我々の指数理論と既存の指数理論との違いを示唆する興味深い結果と考えられる。今後の研究の方向性として、この差異をより内在的に、作用素の摂動の観点から理解することが考えられる。

当初予定していたモジュライ空間などの上の可積分系への応用までは達成できなかったが、これまで不明であった既存の理論との関係など、新たな知見が得られた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Hajime Fujita, Mikio Furuta and Takahiko Yoshida, Torus fibrations and localization of index III -Equivariant version and its applications-, Comm. Math. Phys. 327 (2014), no. 3, 665-689. (DOI : 10.1007/s00220-014-2039-4)

Hajime Fujita, Mikio Furuta and Takahiko Yoshida, Torus fibrations and localization of index II -Local index for acyclic compatible system-, Comm. Math. Phys. 326 (2014), no. 3, 585-633. (DOI : 10.1007/s00220-014-1890-7)

Hajime Fujita, External edge condition and group cohomologies associated with the quantum Clebsch-Gordan condition, Kyushu Journal of Mathematics, vol. 66, No.2, 383-391(2012). (HP : <https://www.jstage.jst.go.jp/browse/>

kyushujm/66/2/\_contents)

[学会発表](計 4 件)

Hajime Fujita, Equivariant local index and transverse index for circle action, 5th International Conference on Geometry and Quantization (GEOQUANT), Erwin-Schrodinger International Institute for Mathematical Physics (ESI), Vienna, Austria, August 26 - 30, 2013. (Organizers : Martin Schlichenmaier, Joachim Hilgert, Ryoichi Kobayashi, Armen Sergeev, et.al.)

藤田 玄, シンプレクティック多様体のある種の S1-同変指数について, 2013 年度日本数学会年会・幾何学分会, 京都大学, 2013 年 3 月.

藤田 玄, トーラス束による指数の局所化とその応用, 幾何学阿蘇研究集会, 休暇村南阿蘇, 2012 年 9 月, (世話人 : 本多正平 (九州大学), 川上裕 (山口大学), 小磯深幸 (九州大学), 梅原雅顕 (東京工業大学), 山田光太郎 (東京工業大学).)

藤田 玄, トーラス束による指数の局所化とその応用, 非可換幾何学と数理物理学 2012, 慶応大学, 2012 年 8 月, (世話人 : 郡敏昭 (早稲田大学), 吉岡朗 (とうきよ理科大学), 楯辰哉 (名古屋大学), 本間泰史 (早稲田大学), 廣田祐士 (東京理科大学), 宮崎直哉 (慶応大学)).

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤田 玄 ( FUJITA, Hajime )  
日本女子大学・理学部数物科学科・講師  
研究者番号：50512159

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

古田幹雄 ( FURUTA Mikio )  
東京大学・大学院・数理科学研究科・教授  
研究者番号： 50181459

吉田尚彦 ( YOSHIDA Takahiko )  
明治大学・理工学部・数学科・講師  
研究者番号： 70451903