様式Ｆ－１９

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成２５年　５月２５日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：若手研究（B）
研究期間：２０１１～　２０１２
課題番号：２３７４００６０
研究課題名（和文）　接束上に様々な構造を持つ多様体のアファインはめ込みとその応用

研究課題名（英文）　An affine immersion from a manifold with certain structures on its tangent bundle and its application

研究代表者
黒須　早苗　（KUROSU　SANAE）
東京理科大学・理学部・助教
研究者番号：７０４５７８４４

研究成果の概要（和文）：
１．概積・概複素構造を持つ多様体から実アファイン空間へのアファインはめ込みよる部分多様体ついて、そのアファイン基本形式がある種の適合条件を満たす場合に、特徴付けを行った。
応用として、計量を備えた多様体である（パラ）ケーラー多様体、概積リーマン多様体のはめ込みの性質について調べた。特に、余次元が１、２の場合に完備パラケーラー多様体からのパラ多重調和等長はめ込みの分類を行った。

２．筑波大学の守屋克洋氏との共同研究において、リーマン面から球面への調和写像を用いて、ｔｔ＊束を構成した。これは四元数構造、及びクリフォード代数の構造が持つ性質を用いたもので、既に知られている多重調和写像を用いた構成法とは異なる結果である。

研究成果の概要（英文）：
１．We characterize an affine immersion from a manifold with almost product structure or an almost complex structure to a real affine space whose affine fundamental form is Hermitian or anti-Hermitian with the structure. As an application, we study an isometric immersion of a para-Kaehler manifold or an almost product Riemannian manifold, which is a manifold with metric which is compatible with the structures. Especially, we classify a para-pluriharmonic isometric immersion from a complete para-Kaehler manifold of codimension one or two.

２．We find a new construction of a tt*-bundle structure associated with a harmonic map from a Riemann surface into a sphere, that is a collaboration work with Katsuhiro Moriya. This construction is related to the Clifford algebra.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
交付決定額	９００００００	２７００００	１１７００００

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何、部分多様体論

１．研究開始当初の背景

ケーラー多様体や概積リーマン多様体の幾何学については、その複素構造、概積構造と計量との関連から多くの性質が既に調べられてきた。特にケーラー多様体の部分多様体論は、第二基本形式が反エルミート型のとき、極小部分多様体となるため、これらの部分多様体の研究は様々な場面で行われている。

最近、数理物理学との関連から研究が進められているスペシャル複素幾何学やその一般化された概念である tt*構造は、物理学的には topological quantum field 理論に現れ、数学的にはホッジ構造の変動の一般化と捉えることができ、平均曲率一定曲面、複素ラグランジュ部分多様体、フロベニウス多様体やある擬リーマン対称空間への多重調和写像との関係が研究されている。
また複素構造でなく、概積構造を考えることによってこれらの「パラ複素版」の研究も進められている。
スペシャルケーラー多様体とは、ケーラー多様体と計量的でない、平坦かつ複素構造を閉にするアファイン接続から構成される多様体であり、計量の幾何学と接続の幾何学の両方の観点から研究を行うことが可能である。
また、情報幾何学はニューラルネットワークやゲノム解析、生物の系統樹の統計モデルにも適用が可能であり、様々な方面からの研究が行われている。その微分幾何学的構造に着目して定義された統計多様体は、フィッシャー情報量と呼ばれるリーマン計量から決まるレビ・チビタ接続とアファイン接続、それに計量を介して双対なもう１つのアファイン接続から定まり、アファイン微分幾何学とリーマン幾何学の両方の幾何学を含む対象と捉えることができる。
また、平坦な統計多様体であるヘッセ多様体の接束にはスペシャルケーラー多様体の構造が入ることが知られている。
従って、統計多様体の幾何学、スペシャル複素幾何は接続の幾何学と計量の幾何学の両方の性質を持った幾何学と考えられる。
接束上にある構造を持ったこれらの多様体の幾何学を統一的に研究する方法として、ベクトル束の分解とそれに対応して分解される接続や計量の幾何学とみることが有効であり、研究代表者はこの手法を用いてアファインはめ込みの幾何学について、研究を進めてきた。

２．研究の目的

本研究では接束上に入る様々な構造、特に概複素構造と概積構造を持つ多様体である、概複素多様体、概積多様体からのアファインはめ込みによる部分多様体論を統一的に研究し、その応用としてパラ複素多様体と呼ばれる特別な概積多様体の部分多様体論や、光的部分多様体を含む計量を持つ多様体間のはめ込みの理論について研究することを目的とする。
また、スペシャル（パラ）ケーラー多様体を含むクラスのスペシャル（パラ）複素多様体はその接束上に（パラ）tt*構造と呼ばれるベクトル束構造を許容するが、これらの構造の部分多様体論を用いた特徴付けについて研究を行う。
アファイン微分幾何学を用いた定式化は、様々な部分多様体論に適用可能なものであるが、(擬)リーマン多様体の部分多様体論の研究に用いられることは少ない。アファイン微分幾何学からのアプローチを考えることで、アファインはめ込み特有の結果だけでなく、様々な部分多様体論についても新しい結果を得ることが期待できる。
より具体的に、次のような研究を行うことを目的とする。

・アファインはめ込みによる部分多様体論
アファインはめ込みによる部分多様体論は次の３つの側面を持つ。
（１）グラフはめ込み、ブラシュケはめ込みのように、アファインはめ込み特有の横断的ベクトル場を持つ部分多様体論
（２）（擬）リーマン幾何学における等長はめ込みの幾何学の一般化
（３）光的部分多様体などの退化する部分多様体論の一般化
横断的ベクトル場のかわりに横断的補空間を考えることで余次元一般のアファインはめ込みを定式化すると、これら３つの側面を統一的に研究することが可能であり、複素多様体の幾何学については既にいくつかの結果を得ている。また、パラ複素多様体の幾何学についても類似の手法で行われて入り研究がある。

・概複素多様体の部分多様体論、概積多様体の部分多様体論
これらの部分多様体論については古くから多くの研究が行われているが、その多くは適合した計量と計量的な接続から決まる幾何学である。本研究では、計量に依存しない、接続の幾何学としての性質や、計量の入れ方が部分多様体の性質とどのような関連を持つか、について研究することを目的とする。

・tt* 構造とスペシャル複素幾何
アファインはめ込みとスペシャル（パラ）ケーラー多様体については、Cortes, Lawn Shafer による、非固有アファイン超球面での特徴付けが知られている。また、射影スペシャルケーラー多様体と呼ばれるスペシャルケーラー多様体に C*作用を施して得られる多様体は固有アファイン超球面により特徴付けられている。これらの特徴付けには、計量的でない平坦なアファイン接続が大きな役割を果たしている。従ってアファイン微分幾何学を本質的、かつ有効に応用することができる分野とみなすことができる。
また、スペシャルケーラー多様体の接束が

持つ性質を一般化したとみなすことができる tt*束構造を接束にもつ多様体は等積はめ込みで特徴付けられることが確認できているので、更に詳しく研究することで、ベクトル束構造とアファインはめ込みによる特徴付けとの関連が明瞭になることが期待される。

以上のような事柄の研究手法としてベクトル束の分解の幾何学、そしてそれを用いた、接続の幾何学としてのアファイン微分幾何学による部分多様体論を用いることは有効だと思われるが、これまでこのような手法での研究はあまり行われてこなかった。従ってこの観点から研究を行うことで新しい結果が得られることが期待される。

従って本研究では、アファインはめ込みによる部分多様体論を特に、概積、概複素多様体からのアファインはめ込みに対して行い、その応用として、退化する部分多様体、パラ複素多様体、接束がｔｔ＊構造を持つ多様体の幾何学を研究することを目的とする。

３．研究の方法

本研究では概複素多様体、概積多様体からのアファインはめ込みによる部分多様体論をＪＪ＝±Ｉを満たす構造を持つ多様体からのはめ込みとして統一的に扱うことで研究する。

情報収集の為に研究交流や研究集会へ参加する。

現在までのアファインはめ込みによる部分多様体論の研究を継続し、特に概複素多様体、概積多様体からのアファインはめ込みについて研究を行う。部分多様体としての特徴付けについては、ケーラー多様体や計量が与えられた概積多様体の結果を参考にして、それらの一般化を目指す。また、アファインはめ込み特有の性質についても研究し、そのような具体例の構成も試みる。そして特別なケースとして(パラ)複素多様体、(パラ)ケーラー多様体の部分多様体論や、退化する部分多様体論への応用や tt*構造との関係について研究する。

光的部分多様体論のような退化する部分多様体論では、接束の計量による直交分解が一意に定まらない為、横断的な補空間を固定して部分多様体論を展開する。その手法は横断束を用い、その取り方に依らない性質を研究するというアファインはめ込みによる部分多様体論がそのまま適用可能である。さらに計量の条件から、このような部分多様体特有の詳しい性質が研究により明らかになることが期待される。

接束がｔｔ＊構造を持つ場合のアファインはめ込みによる特徴付けについては、既に部分的な結果を持っているが、スペシャルケーラーの場合に既に得られているアファインはめ込みの表現公式の類似物を構成する事や、部分多様体上にｔｔ＊構造を構成することを目標に研究を続けていく。

また、次の事柄について共同研究を行う。

・アファインはめ込みによる部分多様体論

黒瀬俊氏（福岡大学)、古畑仁氏（北海道大学)、松添博氏（名古屋工業大学）ら、アファイン微分幾何学や情報幾何学を専門に持つ各氏と、概積、概複素多様体のアファインはめ込みだけでなく、接束にｔｔ＊構造が誘導されるアファインはめ込みの構成なども目標に研究交流を行う。年１，２回程度、全体としての研究集会等で交流の場を持ち、さらに個別に年１，２回程度訪問して研究打ち合わせを行う。

共同研究については次のように行う予定である。

・接束がｔｔ＊構造を持つ多様体（スペシャル複素多様体、スペシャルケーラー多様体を含む）の部分多様体論の研究

（パラ）スペシャルケーラー多様体は、その特徴付けとして「非固有アファイン超球面で実現される」という性質を持つ。また、特別なクラスである射影スペシャルケーラー多様体は「固有アファイン超球面で特徴付けられる」という性質をもつ。これらのスペシャルケーラー多様体はそれぞれ重みが１，２のＶＨＳ（ホッジ構造の変動）と関連する。より一般に重みがｋ?ＮであるＶＨＳに対応するスペシャルケーラー多様体とそれを特徴つけるアファインはめ込みについて、マーティン・ゲスト氏（首都大学東京）と既に共同研究を開始しており、首都大学東京において定期的に（年３，４回)、研究打ち合わせを今後も継続する。また、ゲスト氏が主宰予定のｔｔ＊幾何学関連の研究集会には以前から参加しているが、今後も参加して参加者との研究交流を行う予定である。

・ 光的部分多様体や(パラ)ケーラー多様体の部分多様体論の研究

パラケーラー多様体はニュートラルな計量を持つ多様体で、擬リーマン多様体の部分多様体論としてのみならず、退化する部分多様体も出現する。パラ複素多様体からのアファインはめ込みの研究は、計量が退化する部分多様体論に応用が可能であると思われる。このアプローチから光的部分多様体を研究している榊真氏(弘前大学)と将来的には研究交流を持ち、この分野にアファインはめ込みの理論を応用する事で研究を進める。

得られた結果の発信と更なる研究交流を目的として、勉強会や研究集会を開催する。更

に２４年度は、研究成果の発表や研究交流の為に海外へ出張する。

４．研究成果

１．概積・概複素構造を持つ多様体の部分多様体について、複素および概積構造とそれに適合したアファイン接続を持つ多様体からの、ある性質を満たすアファインはめ込みの特徴付けや更に適合した計量を持つ（パラ）ケーラー多様体、概積リーマン多様体の部分多様体論についての次のような結果を得た。
（１）複素多様体からのアファインはめ込みで誘導接続が完備であり、そのアファイン基本形式が（反）エルミート型となるものは、アファイン基本形式の零化空間の余次元２、４の場合に柱状または、線織的となる。特に、超曲面の場合は柱状になる。
（２）概積構造を持つ多様体からのアファインはめ込みで誘導接続が完備であり、アファイン基本形式が（反）エルミート型となるものは、そのアファイン基本形式の零化空間が余次元１、２の場合に柱状または線織的となる。
（３）完備パラケーラー多様体からのパラ多重調和等長超曲面は柱状である。
　パラケーラー多様体からの等長はめ込みは、平坦でなければパラ多重調和性と極小性が同値となるのでこれは極小部分多様体に関する結果と見ることも可能である。

２．筑波大学の守屋克洋氏との共同研究において、リーマン面から球面への調和写像を用いて、ｔｔ＊束を構成した。これは既に知られている多重調和写像を用いた構成法とは異なるものである。

３．幾何学シンポジウム等の研究集会に参加し、情報収集を行った。特に１１月には中国・清華大学に出張し、研究集会に参加、また　清華大学、北京大学でｔｔ＊構造に関連した講演を行った。また同大滞在中は同大教授馬輝氏との研究交流を行い、特殊ラグランジュ幾何学とｔｔ＊構造との関係について議論を行った。スペシャル複素幾何も含めたこれらの関係については研究を継続しており、さらに統計多様体の持つ性質との関連についても研究を進め、平成２５年３月には北海道大学でのミニワークショップで部分的な結果を報告した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）
（１）Katsuhiro Moriya ,Sanae Kurosu、A tt*-bundle associated with a harmonic map from a Riemann surface、Differential Geometry and its Applications、査読有、３０、２０１２、２２７－２３２

（２）Sanae Kurosu、Relative nullity distributions, an affine immersion from an almost product manifold and a parapluriharmonic isometric immersion、Annals of Global Analysis and Geometry、査読有、４２、２０１２、３３３－３４７、DOI　10.1007/s10455-012-9315-3

（３）Sanae Kurosu、A characterization for a (2,0)-geodesic affine immersion、Results in Mathematics、査読あり、６３，２０１３、１１５－１２８、DOI 10.1007/s00025-011-0165-2

〔学会発表〕（計１件）
黒須早苗、余次元２の多重調和アファインはめ込みの特徴付け、日本数学会秋季総合分科会、２０１２

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
　黒須　早苗（KUROSU　SANAE）
　東京理科大学・理学部・助教
　研究者番号：７０４５７８４４