

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 18 日現在

機関番号：24402

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740064

研究課題名(和文)非コンパクトな錐特異点集合を持つ3次元錐双曲構造の具体的構成

研究課題名(英文)Concrete construction of cone hyperbolic structures for a 3-dimensional cone manifold with non-compact cone singularity

研究代表者

秋吉 宏尚(Akiyoshi, Hirotaka)

大阪市立大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：80397611

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円、(間接経費) 570,000円

研究成果の概要(和文)：錐特異点を1点だけ許容するトーラスと区間の直積として得られる3次元錐多様体が許容する錐双曲構造に関し、よい基本多面体の存在という幾何的条件と、BQ条件という代数的性質が一致するであろうという予想(秋吉・山下予想)の解決を目指した。(1)考察の対象を実表現に限定すると、秋吉・山下予想が肯定的に解決された。(2)よい基本多面体から誘導される錐双曲構造に関し、閉曲線の測地線としての実現可能性に関する結果とその長さの評価を得た。(3)標準的な接球近傍を持つ完備錐双曲構造に対するフォード領域を定義し、本研究で考察しているよい基本多面体がフォード領域であることを示した。

研究成果の概要(英文)：The space of complete cone hyperbolic structures on the 3-dimensional cone manifold obtained as the product of the torus with a single cone point and the interval has been studied, where a conjecture of Akiyoshi and Yamashita, which expects a certain relation between geometry and algebra, has been focused on. The following facts has been revealed: (1) The conjecture is true on the subspace consisting of real representations. (2) The simple loops are realized by geodesics for the cone hyperbolic structure associated with "good fundamental polyhedron". Moreover, certain bound on the lengths of geodesics are found. (3) The notion of Ford domain is generalized to the complete cone hyperbolic structures containing a "standard horospherical neighborhood", and the good fundamental polyhedra are shown to be the Ford domains.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：双曲幾何 クライン群 リーマン面 3次元多様体

### 1. 研究開始当初の背景

コンパクトな錐特異集合を持つ3次元錐双曲多様体の研究は Thurston による「軌道体一意化定理」の証明のために1990年代に大きく進歩し、その後、普遍デーン手術理論に応用されたほか、その無限体積版の発展はクライン群論における重要な Bers 稠密性予想の解決などに本質的に用いられた。本研究の中心課題となる非コンパクトな錐双曲構造を持つ3次元錐双曲多様体の研究は、「双曲的ヘガード分解の理論の構築」「相異なる位相を持つリーマン面の退化の統一的理解」の観点から、その整備が待たれるところであった。

本研究はその第一歩として、トーラス上1点だけ錐特異点を許容する錐曲面と区間の直積として得られる3次元錐多様体の双曲構造を研究するものであるが、研究代表者による先行研究により、よい基本多面体から得られる錐双曲構造の例が多数構成されており、その際に行われた数値実験と Tan-山下による数値実験との比較を通して、そのようなよい基本多面体を持つ錐双曲構造と表現空間の力学的な性質を反映する BQ 条件と呼ばれる条件を満たす表現が対応することが予想されていた(「秋吉・山下予想」)。

### 2. 研究の目的

本研究の目的はコンパクトでない錐特異点集合を持つ3次元錐多様体が許容する錐双曲構造の変形理論を構築することであり、そのモデルケースとして、まずはトーラス上にひとつの錐特異点を持つ錐多様体と区間の直積として得られる3次元錐多様体が許容する錐双曲構造の変形理論の確立を目指す。

その過程で、交換子積が楕円的変換となる2元により生成される  $PSL(2, \mathbb{C})$  の部分群に対する「幾何学的有限性」の概念を、Bowditch および Tan-Wong-Zhang により考察された Markoff 写像の理論という代数的な対象と、Jorgensen 理論により考察された Ford 領域を拡張することで得られる幾何学的対象の両面から定式化していきたい。

そこで得られる結果を応用することで、非コンパクトな錐特異点集合を持つ錐双曲構造の大域的変形理論を構築することを目指す。

### 3. 研究の方法

(1) 研究代表者の先行研究により、穴あきトーラスクライン群のフォード基本多面体に関する Jorgensen 理論をまねることで、錐双曲構造をよい基本多面体から構成できる場合があることがわかっている。また、この構成法では、錐多様体の無限遠境界として2枚の錐特異点つきトーラスと同相なりーマン面が自然に定義される。この構成法により「十分豊富」な錐双曲構造が実現可能であることを証明する。

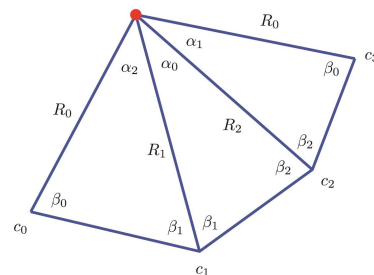
(2) Tang-Wong-Zhang により導入された BQ 条件と ending lamination 予想 (ELC) について考察する。Tan-山下により、BQ 条件はクライン群における幾何学的有限性とよく似た性質を持つこと、および、ある種の“退化”した表現に対しては ELC には反例があることなどが数値実験を通して観察されている。よい基本多面体から得られる錐双曲構造が BQ 条件を満たすことを証明する。

(3) 以上の研究の成果を応用することで、よい基本領域から構成される錐双曲構造に対する変形理論を解析的観点から構築していく。より具体的には、考察対象の錐双曲構造は、錐角と無限遠等角構造を固定すると変形不可能であることを示し、よい基本多面体が定める錐双曲構造の変形空間を錐角と無限遠等角構造によりパラメータづけていく。

### 4. 研究成果

大きく分けると、(1)モデル錐多様体が許容する錐双曲構造のホロノミー表現が実表現である場合の精密な考察、特に、この場合の秋吉・山下予想の解決、(2)錐特異点つきトーラス上の閉曲線に対するモデル錐多様体の錐双曲構造の下での測地線による実現可能性、(3)錐双曲構造に関するフォード領域の導入が成果としてあげられる。

(1) 研究代表者による先行研究において、モデル錐多様体の錐双曲構造に関するホロノミー表現の幾何学的パラメータ付けが与えられたが、その表現が実表現となるものに限ることで、さらに詳細なパラメータ付けを得ることができ、よい基本多面体の存在や特徴づけにも応用できることを観察した。



先行研究で得られたパラメータは、本質的には複素平面内に描かれた上の図における  $c_0, c_1$  の二点で定まる複素2次元のものだったが、実表現に制限することで、上の図中の角度  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  とその線形関係式から定まる実2次元のパラメータが得られる。図中の角度や長さの関係式も具体的に得られることから、非常に詳細な研究が可能となった。

上述のパラメータを用いることで、考察している表現がよい基本多面体を持つための必要十分条件をパラメータに関する条件として記述することに成功した。この特徴づけを応用し、Goldman による実表現に関する研究、および Tan-Wong-Zhang による一般化された Markoff 写像に関して証明した事実を用

いることで、次の定理が得られた。

**定理** (雑誌論文)。このような実表現に対し、よい基本多面体が存在するための必要十分条件は、その表現が固定点を持たないことである。また、この条件は BQ 条件の成立とも同値である。

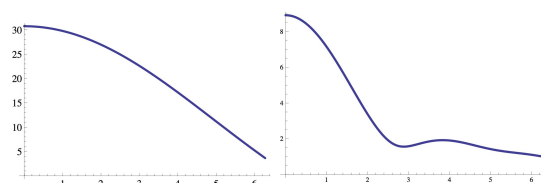
この定理は実表現に制限した場合の秋吉・山下予想の肯定的解決に相当する。

実表現に限らずよい基本多面体を持つ一般の表現に関して、Jorgensen 理論における side parameter の類似物を定義することができるが、それを実表現に制限すると、錐双曲構造の大域の変形空間 (タイヒミュラー空間) の (大域的な) パラメータが得られることがわかった。さらに、このパラメータを用いることで、錐角を  $2$  に近づけていく場合の、錐双曲面からユークリッドトラスへの退化の考察も可能となった (論文準備中)。

(2) よい基本多面体を持つ錐双曲構造の幾何とホロノミー表現との関係を考察するため、錐特異点つきトラス上の単純閉曲線の測地線としての実現可能性について考察した。よい基本多面体を持つ、エンドに向けて計量が指数的に増大していくという性質を用いることで、閉曲線の錐特異点の補集合における長さの下限を実現する測地線、および錐多様体の底空間のホモロジー類における長さの下限を実現する測地線の存在を証明することができた。また、その長さに関して、前者に対しては上からの評価、後者に対しては上下両方からの評価が得られる。この考察により、特に錐角が  $2$  を整数で割った形で与えられる軌道体に対しては、よい基本多面体の存在が BQ 条件の成立を導くという、秋吉・山下予想の半分が得られることがわかるが、一般の錐角に対しては、前者の意味で実現される測地線が錐特異点集合と交わる場合に、測地線の長さという幾何的性質とホロノミー表現の像という代数的性質の間に差が生じるために、同様の主張を証明するには至っていない。しかしながら、この考察が予想の解決のための鍵の一つであると確信している。

以上の考察で生じた、実現される測地線と錐特異点集合の交わりが引き起こす現象に関する問題を解決するために、作間誠氏との共同研究により、研究代表者が作間、和田、山下の三氏との共同研究により構成した、二橋結び目補空間へとつながる錐多様体に対して、錐特異点と測地線が交わる現象を数値的に検証した。数値実験においては、錐特異点と測地線が交わらない場合のホロノミー表現のある種の単調性、および、交わる場合の単調性の崩れが観察された (次図参照、雑誌論文)。この観察は現在研究対象としているモデル多様体の錐双曲構造とも関わると期待されるが、その考察は今後の研究の重

要な課題として残される。



(3) 完備錐双曲構造を持つ 3 次元錐多様体が標準的な接球近傍を含むと仮定する。ここで、標準的な接球近傍とは、(i) 接球、(ii) 接球をそれに作用する離散群作用で割ったもの、または、(iii) 境界と垂直に交わる測地線において  $2$  未満の面角をもつ接球の部分集合から側面を貼り付けることで得られる錐双曲多様体のことをいう。そのような錐多様体に対しては、標準的な接球近傍に関する cut locus を定義することができ、その補集合の弧長距離に関する完備化がフォード領域として定義される。この定義は、(i) または (ii) のタイプの標準的な接球近傍を含む滑らかな 3 次元双曲多様体に対するフォード領域の定義と一致する。

以上の定義のもと、本研究で考察してきたよい基本多面体が、それ自体から誘導される完備錐双曲構造に関するフォード領域となることがわかった。また、(2) でも触れた二橋結び目補空間へとつながる錐双曲多様体に対しても同様の事実が示される (論文準備中)。

本研究開始時においては、よい基本多面体に関して Jorgensen 理論の類似として得られる基本多面体という以上の幾何学的意味が分かっていなかったが、この考察により、クライン群に対するフォード領域と同様に、よい基本多面体は錐双曲構造から一意的に定まる標準的なものであることがわかった。クライン群論においては、ホロノミー表現の像として得られるクライン群とその作用による商空間として得られる双曲多様体の間には一対一の対応があるために、フォード領域はホロノミー表現に関する標準的な基本領域であったが、本研究においては、現時点ではホロノミー表現に対する錐双曲構造の一意性は示されていないので、この結果の代数的な応用は今後の課題である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

Hiroataka Akiyoshi, Donghi Lee, and Makoto Sakuma, A variation of McShane's identity for 2-bridge links and its possible generalization, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読あり, 掲載決定 (出版年・巻未定)。

Hiroataka Akiyoshi, Canonical polygons for the hyperbolic structures on the

torus with a single cone point ,Topology and its Applications , 査読あり , 掲載決定 ( 出版年・巻未定 ) .

〔学会発表〕(計 7 件)

秋吉宏尚 , Towards the variation of Jorgensen's theory for the torus with a single cone point , 離散群と双曲空間の複素解析とトポロジー , 2014 年 1 月 23 日 , 京都大学

秋吉宏尚 , 錐特異点を 1 点持つトーラスの錐双曲構造について , 日本数学会秋季総合分科会 , 2013 年 9 月 24 日 , 愛媛大学

Hiroataka Akiyoshi , A concrete construction of cone hyperbolic structure II, The 5th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knot Theory and Related Topics, 2013 年 7 月 23 日 , 大阪市立大学

秋吉宏尚 , Concrete construction of cone hyperbolic structures , 研究集会「E-KOOK セミナー」, 2013 年 2 月 15 日 , 大阪市立大学

Hiroataka Akiyoshi , A concrete construction of cone hyperbolic structure , The 4th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics , 2012 年 7 月 23 日 , Pusan National Univ., Korea

秋吉宏尚 , 錐双曲構造の具体的構成について , 新 KOOK セミナー , 2012 年 6 月 23 日 , 大阪市立大学文化交流センター

秋吉宏尚 , Jorgensen 理論の錐双曲構造への応用の模索 , Workshop「クライン群とコンピュータグラフィックス」(1), (2) , 2012 年 3 月 5~6 日 , 名古屋大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕  
ホームページ等

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

秋吉 宏尚 (AKIYOSHI, Hiroataka)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号 : 80397611

(2) 研究分担者

( )

研究者番号 :

(3) 連携研究者

( )

研究者番号 :