

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 17 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740082

研究課題名(和文)ジャンプ過程に対する統計的漸近推測理論の構築とその応用

研究課題名(英文)Developing statistical asymptotic theory for jump processes and its applications

研究代表者

増田 弘毅(Masuda, Hiroki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授

研究者番号：10380669

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円、(間接経費) 870,000円

研究成果の概要(和文)：ジャンプ型確率過程の漸近推測理論の基盤構築に関し、主として以下の結果を得た。(1) 正規分布近似に基づいた推定量の漸近正規性を示し、更に、非正規ノイズの分布の正確な情報を用いずに信頼領域を構成可能とする推定方式を定式化した。(2) ノイズ過程の非正規因子の存在および拡散係数の誤特定を同時に一致検出する検定統計量を自己規格化残差に基づいて提案し、その漸近挙動およびバイアス補正公式を導出した。(3) 安定分布近似可能なノイズ過程で記述されるモデルの非正規疑似尤度推定法を提案し、漸近混合正規性を導出した。

研究成果の概要(英文)：Mainly, we have derived the following results concerning statistical inference for stochastic process models with jumps: (1) Asymptotic normality of the Gaussian quasi-likelihood type estimator together with an easy-to-use approximate confidence regions, when the model has general non-linear coefficients and non-Gaussian noise; (2) Model-free asymptotic distribution of a bias-corrected functional of residuals, with applications to noise-normality and diffusion-coefficient misspecification tests, when the model is of a general continuous-time regression type; (3) Asymptotic mixed normality of the least-absolute deviation estimator and the quasi-likelihood estimator based on the small-time stable approximation, when the noise process can be approximately non-Gaussian stable in small time. In particular, the proposed estimator in (3) is much more efficient than that in (1), while the model setting in (3) is more limited compared with that of (1).

研究分野：統計数学，確率過程論

科研費の分科・細目：数学，数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：統計的漸近推測 ジャンプ過程 確率過程論 確率解析

1. 研究開始当初の背景

連続的に時間発展する実現象から派生するデータ系列は自己従属性および非正規性を呈し、例えば日内の株価収益率やインターネット通信量などの高頻度データ系列においては純粹ジャンプ型時間発展の様相が実証されている。時間的に高頻度なデータ情報に対して統計解析を試みる場合、情報量がランダムである漸近混合正規性が自然に生じ得ることや推定量の収束速度の差異など、従来の時系列モデルでは捉えきれない実データ特性を浮き彫りにできるという意味で、確率過程によるモデリングが重要かつ必須である。例えば、時間変動現象の平均構造とボラティリティ変動などにおいてこの現象は顕著に現れる。確率過程モデルの中でも特に、レヴィ過程で駆動される“ジャンプ型確率微分方程式”(以下“JSDE”)は確率構造の表現力が高く、幅広い応用分野で現れる非正規変動現象を捉える基本的なモデル族である。しかし、当該モデルの統計解析に際しては漸近推測論に確率解析および確率過程論が相互に絡み合う独自の融合理論の発展が不可欠であり、世界的視野で見ても理論と実用性のバランスのとれたJSDE推測理論の構築は未だ発展途上にある。当該問題の困難さは、主としてJSDEのジャンプ構造の極度な多様性により、いかなる最適推定方式が自然であるか自体をも不明瞭な点にある。この観点から、具体的なモデルで生じる解析的現象の知識情報の蓄積が不可欠であり、事例研究の先行も重要である。これまで漸近フィッシャー情報量が常に退化する現象が自然に生じ得るなど、非正則的な現象が徐々に明らかとなりつつあるが、拡散過程の場合のような、汎用性の高い強固な基礎理論の構築が必要である。

2. 研究の目的

本研究は、ジャンプを持つレヴィ過程駆動型のジャンプ確率過程モデルを対象として、大規模高頻度サンプリングに基づいた統計的漸近推測理論の基盤創成を主眼とする。この問題の解決に際しては、非正規型の確率過程論および確率解析に厳密に裏打ちされた確率過程に特有の極限定理の導出が不可欠である。あらゆる統計手法の基礎となるモデルの推定に関して、正規型および非正規型の疑似最尤推定法や可予測加重型の最少絶対偏差推定法による高い汎用性を有する推定量を定式化し、その漸近挙動を収束率および漸近分布の観点から理論的に解明を介して、当該分野における最先端の統計手法開発を目指す。更に、計算機上に数値実験および実データ解析を視野に入れた実装環境を整備し、例えば信号処理やシステム同定、数理生物学などの、スパイク型(非正規型)ノイズが現象のモデリングに適合している分野における統計解析の基礎理論構築を目指す。

本研究課題の申請時に明記した具体的な

研究目的を整理すると以下のようになる。

(1) 正規型疑似最尤推定量(GQLE)の収束速度と漸近分布の解明 一般の多変量JSDEを対象とし、当該確率場の大偏差不等式を介して漸近正規性とその積率の収束まで導出する。本結果により、ジャンプ構造に頑健な推定方式を定式化できることになる。

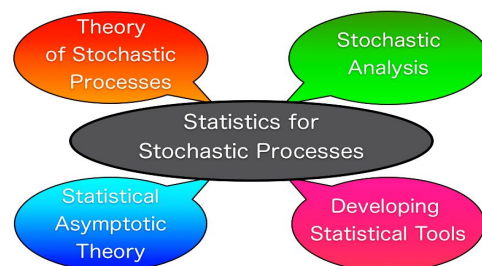
(2) 駆動レヴィ過程の正規性検定の定式化 計算容易な自己規格化残差和型の汎関数として表される統計量を提案し、漸近的に分布無依存かつ調節パラメータ不要な実用性の高い検定方式を定式化する。これによってノイズ係数の状態非線形依存性を許容することで、Lee and Masuda (2010, Statistical Inference for Stochastic Processes) の結果の本質的な拡張を導く。

(3) 非正規安定型疑似最尤推定量(SQLE)の収束速度と漸近分布の解明 微小時間で安定分布近似可能な純粹ジャンプ型レヴィ過程で駆動される場合の疑似尤度関数を提案し、拡散過程の場合の正規型疑似尤度の効率を凌駕する推定方式の解析基盤を構築する。対応する統計的確率場の裾確率の一樣評価を介した積率の収束の導出も目指す。

(4) ジャンプ付きオルンシュタイン-ウーレンバック(OU)過程の局所漸近正規性の導出 駆動レヴィ過程が非退化ジャンプ部分を持つ場合の局所漸近正規性を導出し、特に高頻度観測の場合の最適推定量の満たすべき漸近挙動を解明する。ドリフト(トレンド)係数の一致推定を可能とすることで、拡散過程では導き得ない推測方式とその有用性を明らかにする。

(5) 絶対偏差(LAD)型確率場の強固収束の導出 非線形回帰モデル、非線形自己回帰モデルも包含する一般の形式で、LAD型確率場に関する大偏差不等式成立のための検証容易な十分条件を導出する。特にOU過程のLAD推定における漸近現象を解明し、先行研究Masuda (2010, Electronic Journal of Statistics) の技術的条件の緩和および設定の拡張を同時に行う。

3. 研究の方法



本研究内容は、確率過程論、確率解析および統計解析の融合領域に立脚する。「2. 研究の目的」で挙げた(1)~(5)の各項目について述べていく。

(1)一般の JSDE の疑似尤度確率場に対し、Yoshida (2011)の意味での多項式型大偏差不等式(以下 PLDI)を導出する。特に、有界な係数に制限することで、長期記憶型拡散過程の場合も含まれるような条件を提示する。証明で本質的となる JSDE のエルゴード性は、既に筆者が得ている(Masuda (2007, Stochastic Processes and Their Applications), Masuda (2008, Bulletin of Informatics and Cybernetics))。

(2) セミマルチンゲール回帰モデルの特殊な場合に対してオイラー型残差系列を自然に定義し、エルゴード性を明示的に仮定せずに統一的な解析を行う。多変量の場合には自己規格化残差和の定義自体が問題になるが、Mardia(1970, Biometrika)の多変量歪度および尖度を例として包含するような一般形のまま解析を進める。歪度および尖度の定義が定まっている一次元の場合も系として別個に扱う。

(3) ベンチマークとして、対称安定分布で局所時間近似できるレヴィ型ノイズの場合を考える。安定密度に基づいた滑らかな近似的疑似尤度関数を定義し、M-推定の一般論、より強くは PDLI 理論を適用し、積率条件の下で漸近正規性を導出する。当該手法の漸近解析においてはオイラー離散化誤差と局所安定分布近似という二種類の誤差が生じるが、前者にはマルチンゲール解析を貸した確率・期待値評価を、また後者には局所極限定理を導出することで解決を目指す。

(4) 純粋ジャンプ変動型 OU 過程の場合の尤度関数の表現を用い、特性関数を介して直接解析的な方法を試みる。証明においては特に対数尤度の導関数の可積分性が鍵となる事まで分かっているが、この可積分性の確保のために、正則変動理論を介して OU 過程の遷移密度関数とその導関数の比で定義される関数の裾挙動を特定する。部分積分の公式(ウィナー-ポアソン空間上のマリアヴァン解析)を応用することで先述の可積分性の確保を試みる。

(5) PDLI 理論を応用して、一般の LAD 型統計的確率場の大偏差評価を導出する。確率変数の三角列(triangular array)を用いてコントラスト関数を表現し、高頻度観測される確率過程モデルはもとより、非線形(自己)回帰モデルなども統一的に扱う枠組みを作る。可予測型ウェイトを取り込んだコントラスト関数に対して推定量の積率評価を行う。また、軟化子を作用させた滑らかな LAD 型確率

場の定式化と対応する推定量の漸近挙動の解明も考察する。これは JSDE モデル(OU 過程を含む)の推測においては全く未知の領域である。特に OU 過程モデルの場合において、OU 過程固有の自己回帰構造を利用して Masuda (2010)のコントラスト関数を純粋マルチンゲール型に改良しての正則条件の緩和、および漸近混合正規性の証明を目指す。極限定理の確保については、凸関数列の弱収束に関する結果の適用と“Condition (UT)” (Kurtz and Protter (1991, Annals of Probability))の導出を併せて証明する。

4. 研究成果

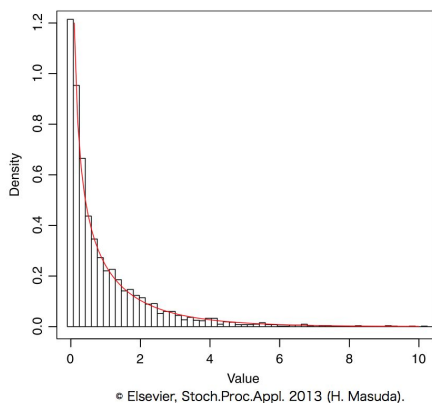
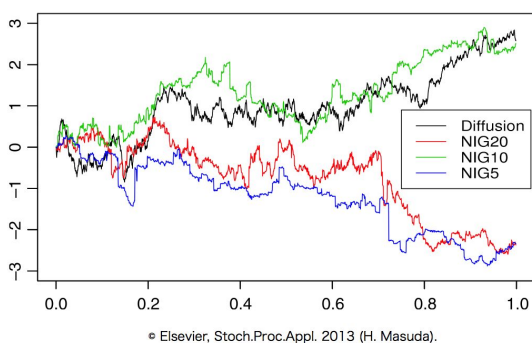
「2. 研究の目的」で述べた項目(1)~(4)について、まず(1)および(2)については当初の研究計画を改善する水準で遂行でき、出版されるに至った。他方、(3)~(5)においては当研究期間中にまとめ上げるには至れなかったが、簡単な(限定された)場合では目的を達成でき、既に複数の国際会議・研究集会において報告済みである(現在投稿準備中)。以下、項目毎に述べていく。以下の丸付き数字は「5. 主な発表論文等」の雑誌論文の番号に対応している。

(1) 指数エルゴード的な多次元非線形確率微分方程式モデルに対し、正規疑似最尤法を定式化して、対応する推定量の漸近正規性を示した。特に、一次元純粋飛躍型ノイズの場合に指数エルゴード性のための検証容易な十分条件も与えた。本結果により、正規型疑似最尤推定量の収束速度とその漸近正規性が得られた。また、漸近共分散行列の一致推定量を駆動レヴィ過程の具体的な構造を要求せずに適用可能な形で与えることにも成功し、信頼領域の構成を直接的なものとした。更に、当該統計的確率場の PLDI を導出し、推定量のモーメント収束まで導出できた。これはモデルの予測評価や情報量規準(モデル選択)の構成における誤差評価で本質的となるため、推定後の様々な統計解析のための基礎的な道具が確保できたことになる。本結果は発表論文として出版された。本結果により、非正規ノイズの存在下で正規型疑似尤度を用いた場合には拡散過程と全く異なる漸近現象が起こる事が明らかとなり、ジャンプ部分検出の重要性が浮き彫りとなった。

(2) 再帰的とは限らない確率微分方程式モデルにおいて、自己規格化残差系列の汎関数から構成される統計量の漸近分布を導出した。特に、モデルがジャンプ部分を持たず、かつ拡散係数が正しくモデリングされているという帰無仮説の下、汎関数型中心極限定理を証明した。本結果は全観測期間が有界か否かに、またモデルがエルゴード的か否かによらず統一的に適用可能である。また極限の正規分布はモデルに依存しないため、様々な一致検定の構成へ直接的に応用可能である。具

体的な応用として、ジャンプの存在および拡散係数誤特定に対する一致検定を定式化した。提案した検定統計量は、微調整パラメータを必要としないため、非常に汎用性が高い。様々な非正規性を有する従属データへ直接適用可能な方法論が得られた。本結果は、発表論文として出版された。同論文では、有限標本での数値実験を通じて計算容易かつ高精度な漸近挙動を観察でき、当該検定の有用性も併せて示されている。

一つ目の図の通り、巨視的に見ただけではモデルのジャンプの検出が困難なことがある。しかし、提案統計量は、その簡易さにも関わらず、高いジャンプ検出力を呈することが確認できた。



二つ目の図は、提案した検定統計量の帰無仮説下での近似精度を表すヒストグラムであり、高精度なカイ自乗近似が見取れる。ちなみに本結果により、上記(1)の最後で言及したジャンプ検出問題の解決手段が一つ得られたことになる。

(3) 疑似安定型確率過程の特殊なレヴィ過程駆動モデルを対象として、尤度の局所安定近似に基づいた疑似最尤推定量を提案し、その漸近混合正規性の導出は達成できた。国際会議 (ISI 2013 Hong Kong, EMS 2013 Budapest, etc.) で当該結果を発表したが、本研究期間中のプレプリントのアップロード、出版確定には至れなかった。目下、応用上重要な確率回帰型モデルを包含すべく、非マルコフ型お

よび外部要因の介在を許す柔軟な設定を扱うための拡張および技術的な過程の更なる吟味・改良を目指して研究を進めている。

(4) 安定型 OU 過程について、有界期間での高頻度観測の下で、自己回帰係数パラメータに関する漸近最適推定について局所漸近混合正規性を得た。本結果により、有限期間の場合においても自己回帰係数の最適収束速度は正規型 OU 過程の場合のそれと著しく異なることが明らかとなり、同時に、絶対偏差 (LAD) 型推定量が最適収束速度を達成することも示された (cf. 後述の(5))。本研究期間中のプレプリントのアップロード、出版確定には至れなかったが、目下、回帰モデルの設定を包含できるように設定を拡張して研究を進めている。

(5) オルンシュタイン-ウーレンベック過程について、有界期間での高頻度観測による最小絶対偏差 (LAD) 型推定量の漸近混合正規性を導出した。これは筆者の先行結果 Masuda (2010) で提案されたコントラスト関数の改良版を介して得られた結果である。更に系として、同論文における正則条件を弱めることにも成功した。本結果で特筆すべきは、有界時間区間上のデータでもドリフト母数推定に関する漸近分布論を展開可能な点である。安定型中心極限定理と一般の確率積分の弱収束に関する定理、および凸関数列の性質を併用することで、漸近混合正規性を理論的に明確化できた。当該推定量は正規型疑似最尤推定量よりも速い収束率を有し、拡散過程の場合と本質的に異なる漸近挙動を呈する。これは確率過程モデルのトレンド推定に新たな見解を与えるものである。現在、一種のセミマルチンゲール回帰モデルを包含する設定へ拡張しつつ研究を進めている。

その他、当初の計画にはなかったが、本研究期間中にまとめて出版に至れた内容として、特に下記二点を挙げておく。

(+1) OU 過程を時間積分した確率過程の分布の高次漸近展開の正当性を示し、任意次数の展開係数の解析的表現を得ることができた。本結果により、例えば不変分布の一致推定量である標本平均の漸近正規性とその高次近似が正当化される。有限回のジャンプのみを利用して具体的な剪定汎関数を構成し、切り取った事象の上でマリアヴァン解析を適用することで分布の滑らかさを導出した。結果として、古典的な特性関数の大域的評価を回避でき、非常に簡明かつ検証容易な十分条件を与えた。これは論文として出版された。

(+2) Tempered stable OU 過程の標本路を計算機上で実現するために、遷移確率構造の正確な構造を解明し、併せてその実装アルゴリズムを定式化した (河合玲一郎氏との共同研

究). 特に, 駆動レヴィ過程が有界変動か否かで本質的に結果が異なることが分かった. これは論文 および として出版された.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

Brouste, A., Fukasawa, M., Hino, H., Iacus, S., Kamatani, K., Koike, Y., Masuda, H., Nomura, R., Ogihara, T., Shimuzu, Y., Uchida, M., and Yoshida, N., The YUIMA project: A computational framework for simulation and inference of stochastic differential equations. *Journal of Statistical Software* 57 (2014), no.4, 1-51. 査読あり. [論文 URL リンク: <http://www.jstatsoft.org/v57/i04>]

Masuda, H. and Yoshida, N., Edgeworth expansion for the integrated Levy driven Ornstein-Uhlenbeck process. *Electronic Communications in Probability* 18 (2013), no.94, 1-10. [doi: 10.1214/ECP.v18-2726], 査読あり.

Masuda, H., Convergence of Gaussian quasi-likelihood random fields for ergodic Levy driven SDE observed at high frequency. *Annals of Statistics* 41 (2013), 1593-1641. [doi:10.1214/13-AOS1121], 査読あり.

Masuda, H., Asymptotics for functionals of self-normalized residuals of discretely observed stochastic processes. *Stochastic Processes and their Applications* 123 (2013), 2752-2778. [doi: 10.1016/j.spa.2013.03.013], 査読あり.

Kawai, R. and Masuda, H., Local asymptotic normality for normal inverse Gaussian Levy processes with high-frequency sampling. *ESAIM: Probability and Statistics* 17 (2013), 13-32. [doi: 10.1051/ps/2011101], 査読あり.

Masuda, H. and Morimoto, T., An optimal weight for realized variance based on intermittent high-frequency data. *Japanese Economic Review* 63 (2012), 497-527. [doi: 10.1111/j.1468-5876.2011.00552.x], 査読あり.

Kawai, R. and Masuda, H., Infinite variation tempered stable Ornstein-Uhlenbeck processes with discrete observations. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 41 (2012), 125-139. [doi: 10.1080/03610918.2011.582561], 査読あり.

Kawai, R. and Masuda, H., Exact simulation of finite variation tempered stable Ornstein-Uhlenbeck processes. *Monte Carlo Methods and Applications* 17 (2011), 279-300. [doi: 10.1515/mcma.2011.012], 査読あり.

Masuda, H., Negri, I., and Nishiyama, Y., Goodness of fit test for ergodic diffusions by discrete time observations: an innovation martingale approach. *Journal of Nonparametric Statistics* 23 (2011), 237-254. [doi: 10.1080/10485252.2010.510186], 査読あり.

Kawai, R. and Masuda, H., On the local asymptotic behavior of the likelihood function for Meixner Levy processes under high-frequency sampling. *Statistics and Probability Letters* 81 (2011), 460-469. [doi: 10.1016/j.spl.2010.12.011], 査読あり.

Kawai, R. and Masuda, H., On simulation of tempered stable random variates. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235 (2011), 2873-2887. [doi: 10.1016/j.cam.2010.12.014], 査読あり.

[学会発表](計 20 件)

主要な講演のみを記す. 以下のリストにおいて, "印"は招待講演を表す.

On self-normalized residuals of SDE (June 16, 2011; Dynstoch meeting 2011, University of Heidelberg, Germany)

On quasi-likelihood analyses for stochastic differential equations with jumps (August 26, 2011; ISI 2011 Dublin, Ireland)

Very simple estimation of a non-Gaussian process model (October 28, 2011; Forum "Math-for-Industry" 2011, East-West Center, University of Hawaii)

Statistical inference for jump processes (November 11, 2011; workshop "Infinitely divisible processes and related topics", The Institute of Statistical Mathematics)

Asymptotic mixed normality in estimation of jump SDE (March 13, 2012; workshop "Statistics for Stochastic Processes: Inference, Limit Theorems, Finance and Data Analysis", Institut Louis Bachelier, Paris)

On self-normalized residuals of stochastic processes (May 24, 2012; Japanese Society of Applied Statistics, Institute of Statistical Mathematics)

Local-stable contrast function (June 9, 2012; Dynstoch meeting 2012, Institut Henri Poincare, France)

Non-Gaussian quasi likelihood in

estimating jump SDE (July 3, 2012; 2nd APRM, Epochal Tsukuba)

Non-Gaussian quasi-likelihoods for estimating jump SDE (July 13, 2012; 8th World Congress in Probability and Statistics, Istanbul)

On asymptotic behavior of self-normalized residual sequence (September 10, 2012; Japanese Joint Statistical Meeting 2012, Hokkaido University)

On simulation of Levy processes and stochastic differential equation models (December 20, 2012; Workshop SART2012: Statistical Analysis and Related Topics: Theory, Methodology and Data Analysis, University of Tokyo)

Toward numerical computation of conditional expectations involving Levy integrals (March 27, 2013; Workshop ASC2013 Asymptotic Statistics and Computations, University of Tokyo)

On optimal estimation of stable Ornstein-Uhlenbeck processes (April 19, 2013; Dynstoch meeting 2013, University of Copenhagen)

Estimation of stable-like stochastic differential equations (July 20, 2013; 29th European Meeting of Statisticians, Eotvos Lorand University, Budapest)

On statistical inference for Levy-driven models (August 26, 2013; ISI 2013 Hong Kong)

Estimation of jump SDE via local stable approximation (September 9, 2013; Japanese Joint Statistical Meeting 2013, Osaka University)

Multi-step estimation procedure for stable Ornstein-Uhlenbeck processes (October 27, 2013; Stochastic processes and their statistics in Finance, Okinawa)

Stable quasi-likelihood: Methodology and computational aspects (December 15, 2013; ERCIM 2013, London)

LAD-based estimation of locally stable Ornstein-Uhlenbeck processes (March 4, 2014; Waseda International Symposium on "Stable Process, Semimartingale, Finance & Pension Mathematics", Waseda University)

Remark on the large deviation inequality in mixed-rates asymptotics (March 12, 2014; ASC2014 Asymptotic Statistics and Computations 2014, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
(1) 個人ホームページ
<https://sites.google.com/site/hm20131017/>
(2) 九州大学研究者情報
<http://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K002496/index.html>

6. 研究組織
(1) 研究代表者
増田 弘毅 (MASUDA, Hiroki)
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授
研究者番号：10380669

(2) 研究分担者
()

研究者番号：

(3) 連携研究者
()

研究者番号：