

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：32670

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740088

研究課題名(和文)無限大エルゴード理論の構築と測度論的数論への応用

研究課題名(英文)The construction of the infinite ergodic theory and the application to metric number theory

研究代表者

夏井 利恵 (Natsui, Rie)

日本女子大学・理学部・准教授

研究者番号：60398633

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：無限大不変測度を持つ可測力学系の一般的体系の構築に向けて、数の持つランダム性についてエルゴード理論から新たな解釈を発見することを試みた。特に、具体的な研究モデルとして、標数正理論の中でのEuclidean algorithm、Bruhat-Tits tree上でのFarey maps、実数体上での p -連分数変換などの数論的変換に対して、数の持つ複雑性についての研究成果を得た。

研究成果の概要(英文)：Toward a construction of a general system for the measurable dynamical system with the infinite invariant measure, this research tried to find the new interpretation about the randomness of number from the point of view of the ergodic theory. In particular, this research obtained some results for the complexity of number about number theoretic transformations, for example Euclidean algorithm in the positive characteristic theory, Farey maps on the Bruhat-Tits tree, and p -continued fraction transformations on a real number field, as the concrete research model.

研究分野：エルゴード理論

キーワード：エルゴード理論 測度論的数論 ユークリッドアルゴリズム 連分数変換

1. 研究開始当初の背景

有限不変測度を持つ可測力学系のエルゴード理論的研究は、同型定理や分類問題など数多くの重要な結果が知られており、その一般的体系はある程度築き上げられている。しかしながら、無限大不変測度を持つ変換に対しては、個別の結果は幾つか知られているものの、その一般的体系はほとんど構築されていない。実際、エルゴード定理や再帰定理は成り立たない。また、Erdős 予想に対応するエルゴード理論には無限大不変測度を持つエルゴード変換の保存性が深く関わっていると予想されており、このような研究背景からも、現在、無限大エルゴード理論の新たな研究の進展が大いに期待されている。

-Farey maps と名付けた無限大不変測度を持つ 1 次元写像族の同型問題に関する本研究の研究成果から、無限大不変測度を持つ系において natural extension を介した自己準同形写像と自己同形写像の性質の違いに気付いた。そこで、natural extension を介した自己準同形写像の性質に着眼し、randomness の概念を明らかにすることから無限大不変測度を持つエルゴード的変換の分類を試みる本研究の着想に至った。

2. 研究の目的

本研究の目的は、無限大不変測度を持つ可測力学系の一般的体系の構築に向けて、この系の determinism と randomness の概念に着目し、具体的モデルのエルゴード理論的研究を通して、これらの概念の違いを捉える新たな不変量を見出すことにより系の分類問題へと発展させ、特徴付けを行うことにある。更に、本研究を通して測度論的数論や擬似乱数理論への応用に取り組み、数の complexity についてエルゴード理論の立場からの新たな視点の発見も目的とする。又、Erdős 予想との関連を強く意識しつつ、group action や tree 上での新しいエルゴード理論の展開を試みることも目的とする。

3. 研究の方法

無限大不変測度を持つ可測力学系における randomness の特徴付けへの第一歩として、数の持つランダム性についてエルゴード理論から新たな解釈を発見、確立することに焦点を当てる。まずは幾つかの具体的な数論的変換から数の振舞いを探り、数展開のアルゴリズムに対応する写像の一般的体系である fibred system を無限大不変測度系へと拡張しながら研究対象を広げて行く。そして、無限大不変測度系特有の性質から新しい不変量を探し、この系における randomness と

determinism の違いを捉える。特に、質的には混合性、量的にはエントロピーを系の複雑さを真に反映するように、又、確率不変測度を持つ系に対する古典的定義の自然な一般化となるように定義し、この中から無限大不変測度を持つ系の分類問題に新しい視点の確立を試み、無限大エルゴード理論の一般的体系の構築を目指す。研究の効果的推進の為、海外共同研究者、協力者との連携を積極的に行いながら、研究を進めて行く。具体的には、以下の幾つかの数論的モデルに対する研究に取り組む。

(1) 標数正理論の中でのユークリッドアルゴリズムに関するエルゴード理論的研究

実数体上でよく知られているユークリッドアルゴリズムの議論を非アルキメデス数体上で展開し、その相違や意義を的確に捉えながら、形式的べき級数に対するユークリッドアルゴリズムの新たな解釈をエルゴード理論と測度論的数論の観点から与えることを試みる。ここでは特に、ユークリッドアルゴリズムのステップ数の回数(cost function)に注目する。そして、非アルキメデス数体上に Farey map を新たに創出し、それを効果的に用いながら大数の法則や中心極限定理を追究する。数展開のアルゴリズムに関する本研究を通して、数の持つランダム性を捉えて行く。

(2) 標数正理論の中での polynomial group action と Inhomogeneous Diophantine Approximation の研究

非アルキメデス数体上で polynomial group action と名付ける新しい概念の創出を試みる。具体的には、tree 上で形式的べき級数に対する Farey map の新たな解釈を試み、さらに、ディオファントス近似問題も意識することで、複雑な振る舞いをする数のランダム性について(1)の研究とは異なる視点から捉えることを試みる。

(3) -Rosen 連分数に対するエルゴード理論的研究と測度論的数論の考察

Rosen 連分数は Hecke 群に付随した nearest integer 型の連分数であるが、近年、C. Kraaikamp(Delft)等が β -連分数へ一般化した β -Rosen 連分数と呼ばれる新しい連分数クラスを定義した。この β -Rosen 連分数を研究対象にエルゴード理論と測度論的数論に焦点を当てた研究に取り組む。 β -連分数は非常に複雑な振る舞いをする連分数であり、また、 β -連分数を生成する β -Farey map は無限大不変測度を持つ変換であるため、本研究を通して、複雑な振る舞いをする数のランダム性を捉えて行く。

4. 研究成果

数の持つランダム性についてエルゴード理論から新たな解釈を発見することに焦点をあて、「3. 研究の方法」に従って、幾つかの具体的な数論的変換に対して複雑な数の振る舞いを探った。本研究を通して得られた主な研究成果は以下の通りである。

(1) 標数正理論の中でのユークリッドアルゴリズムに関するエルゴード理論的考察

数展開のアルゴリズムとして代表的なユークリッドアルゴリズムを非アルキメデス数体上で展開し、新たな解釈をエルゴード理論と測度論の数論から与えた。特に、ここではユークリッドアルゴリズムのステップ数を数える cost function に着目し、アルゴリズムの複雑さを評価した。従来の bit-complexity に関する考察だけでなく、non-zero coefficients の数を考慮した新たな complexity に関する考察も行った。手法としては、新たに創出した Farey map を用いながら評価を行うとともに、一方で、Bivariate generating functions の手法も効果的に用いることで、極限定理の追究や complexity の評価を得ることに成功した。また、この手法の導入により、ユークリッドアルゴリズムの高次元化への手掛かりを得ることが出来たことも成果であった。本研究成果により、ユークリッドアルゴリズムだけでなく、他の数展開アルゴリズムに対する研究に発展させて行く足掛かりとなったことも大きな成果であった。尚、本研究成果は「5. 主な発表論文等〔雑誌論文〕 および〔学会発表〕」で発表した。

(2) 標数正理論の中での polynomial group action と inhomogeneous Diophantine approximation に関するエルゴード理論的考察

形式的べき級数に対する Kurzweil type inhomogeneous Diophantine approximation theorem に関する考察である。標数正理論の中のある種のディオファントス近似に対して、無限個の解を持つための必要十分条件を決定した。本研究成果は「5. 主な発表論文等〔雑誌論文〕」で発表した。

Bruhat-Tits tree 上での連分数と geodesic flow の議論に着目し、形式的べき級数に対する Farey map の研究を Bruhat-Tits tree 上で展開し、新たな解釈を発見することを試みた。具体的には、

geodesic flow の time-one map によって与えられる geometric Farey map と Farey map が持つ数論的性質により適合している algebraic Farey map と名付けた新しい Farey maps を定義し、数論的性質やエルゴード理論的性質を導出した。本研究は従来とは異なり、tree 上での新たな展開を試みたことにより、数の持つランダム性について、新たな視点から捉えることに成功した。尚、尚、本研究成果は「5. 主な発表論文等〔雑誌論文〕」で発表した。

(3) -連分数変換から起こる同値関係に関する考察

-連分数変換の軌道から生じる -relation と $GL(2, Z)$ 或いは $SL(2, Z)$ から生じる $GL(2, Z)$ -relation, $SL(2, Z)$ -relation との特徴付けを行った。この研究により、複雑な振る舞いをする数のランダム性を捉える一つの特徴付けに成功した。本研究成果は「5. 主な発表論文等〔雑誌論文〕 および〔学会発表〕」で発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 4 件)

Farey Maps, Diophantine Approximation and Bruhat-Tits tree,
Dong Han Kim, Seonhee Lim,
Hitoshi Nakada, and Rie Natsui,
Finite Fields and Their Applications,
査読有, 30 号, 14-32 頁, 2014 年
10.1016/j.ffa.2014.05.007

On the equivalence relations of α -continued fractions,
Hitoshi Nakada, Rie Natsui,
Indagationes Mathematicae,
査読有, 25 号, 800-815 頁, 2014 年
10.1016/j.indag.2014.02.006

Fine costs for Euclid's algorithm on polynomials and Farey maps,
Valérie Berthé, Hitoshi Nakada,
Rie Natsui, Brigitte Vallée,
Advances in Applied Mathematics,
査読有, 54 号, 27-65 頁, 2014 年
10.1016/j.aam.2013.11.001

A refined Kurzweil type theorem
in positive characteristic,
Dong Han Kim, Hitoshi Nakada,
Rie Natsui,
Finite Fields and Their Applications,
査読有, 20 号, 64-75 頁, 2013 年
10.1016/j.ffa.2012.12.002

〔学会発表〕(計 3 件)

Rie Natsui,
The equivalence relations of
-continued fraction,
Measurable and Topological Dynamical
Systems, Keio 2013,
2013 年 12 月 13 日,
慶應義塾大学(神奈川県横浜市)

Rie Natsui,
On the existence of the Legendre
constant for -continued fractions,
Ergodic Theory and Metric Number
Theory,
2012 年 12 月 06 日,
日本女子大学(東京都文京区)

夏井利恵,
Bit complexity of some Euclidean type
Algorithms,
エルゴード理論とその周辺,
2011 年 12 月 7 日,
大阪大学(大阪府豊中市)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

夏井利恵(NATSUI RIE)
日本女子大学・理学部・准教授
研究者番号: 60398633