

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 20 日現在

機関番号：32689

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740092

研究課題名(和文)楕円型作用素の精度保証つき固有値評価と非線形問題への応用

研究課題名(英文) Verified eigenvalue estimation for elliptic differential operators and its application in non-linear problems

研究代表者

劉 雪峰 (LIU, Xuefeng)

早稲田大学・理工学術院・講師

研究者番号：50571220

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)：ラプラス作用素の固有値評価について、固有値の上界を評価する理論と計算手法はこれまでの研究において確立されている。しかし、固有値の下界の評価は非常に困難な問題として残されていた。本研究はHypercircle equationを利用することで、一般的な多角形領域における固有値の厳密な下界を評価する手法であり、世界で初めて確立した。また、当研究を非線形楕円型偏微分方程式の解の検証に応用することで、従来は困難であった一般的な領域における非線形問題の解の検証も可能となった。

研究成果の概要(英文)：The eigenvalue problem for differential operators is a basic problem in both engineering and mathematics. The upper bounds for the Laplacian have been given in history, but the lower bounds remain to be very difficult. In this research, a new algorithm is developed to give lower bounds for the eigenvalues of the Laplacian. Such an algorithm is based on the finite element method along with the use of the hypercircle equation. It is the first method that can easily deal with eigenvalue problems on domain of general shapes. The eigenvalue bounds are also successfully applied to solution verification for nonlinear partial differential equations defined on arbitrary polygonal domains.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：固有値評価 有限要素法 事前誤差評価 非線形偏微分方程式 精度保証付き数値計算 楕円型微分作用素 固有値問題 Hypercircle equation

1. 研究開始当初の背景

(1) 「ナビエ・ストークス方程式の解の存在と滑らかさ」などの非線形偏微分方程式の問題に関する研究は、多くの研究者が尽力している。

(2) 有限要素法は偏微分方程式の近似解を求めるための、有力な手法として使われている。従来の研究では、有限要素法の定性的な誤差評価しか検討されておらず、非線形偏微分方程式の解の存在性の検証に必要な定量的な誤差評価は少なかった。

(3) 微分作用素の固有値上界を求めることは加藤敏夫氏などによる多くの優れた研究があり理論がほぼ確立されたが、固有値の厳密な下界を求めるのは非常に困難な問題として残されていた。

2. 研究の目的

(1) 非線形偏微分方程式の解の検証に重要な役割を果たす偏微分作用素の固有値評価について、有限要素法を用い、固有値の具体的な上下界を求める。

(2) 具体的に、一般的な領域に定義されるラプラス偏微分作用素の固有値評価方法を開発する。

(3) ラプラス作用素の固有値問題について、非凸なコーナーに現れる特異性を処理するために、新しい方法を提案する。

(4) 偏微分作用素の固有値評価の応用として、一般的な多角形領域における非線形楕円型偏微分方程式の解の検証を行う。

3. 研究の方法

(1) まず、固有値評価に関する文献を調査して従来の理論と評価方法を整理・比較検討することから始める。そのための資料収集・整理、書籍の購入を行う。

(2) 数学的に正しい固有値の評価を求めたいので、精度保証付き数値計算の計算ライブラリ、計算ソフトウェア等の導入を活用する。

(3) 固有値評価に関して、ヨーロッパではこの分野に従事した研究者が多く、Homotopy 法や Lehmann-Goerisch の定理等有名な研究成果も多数ある。よって、国際旅費を有効に利用して、ドイツなどの研究者を訪問し、研究交流や研究連絡を行う。

(4) 従来の有限要素法の研究では、近似解に関する定量的な誤差評価は少なかったので、精度保証付き数値計算の要求に応じて既存の方法の修正や改良は必要である。

(5) 当該研究で得られた成果を国内外で広

く発表と公開する。また、成果の一部はウェブサイト公開し、誰でもブラウザによってオンラインで気軽に利用できる。

4. 研究成果

(1) 有限要素法の近似解に対する誤差評価は補間関数の誤差評価に帰着する。古典的な有限要素法は定性的な誤差評価しか扱われておらず、「具体的な誤差評価は難しい」と考えられていた。

(2) 応募者は三角形の上に定義された 1 次 Lagrange 補間関数に関する Babuska-Aziz 定数がある簡単な超越幾何関数の根であることを証明した。さらに、0 次と 1 次補間関数の誤差評価を検討し、有限要素法の定量的な誤差評価の可能性を示した。

(3) 応募者による誤差定数に関する研究成果は有限要素法分野の研究者に注意を喚起して、有限要素法の定量的な誤差評価への検討が始まった。例えば、有名な数値解析学者 Carstensen Carsten 氏は我々の方法と比べ、新しい定数の評価式を提案した。

(4) 特異性のある楕円型偏微分方程式の境界値問題の誤差評価は極めて困難である。Prage-Synge の定理に現れる Hypercircle equation を上手く利用することで、ポアソン問題の特異性を自然に処理し、有限要素法の定量的な事前誤差評価を得た。

(5) さらに、境界値問題の事前誤差評価と従来の固有値評価手法を合わせて、任意多角形領域でのラプラス作用素の固有値評価を得た。従来の固有値評価方法は特別な領域にしか対応できてないが、この研究で提案した方法は任意多角形領域に対して自然に対応できて、計算量も少ないため、有用性が高い。これは固有値評価の理論と計算法における画期的な成果である。

(6) また、高精度な固有値評価を求めるために、高次有限要素法と Lehmann-Goriesch の定理を合わせて、厳密に正しい有効数字が 8 桁以上になる高精度な評価が得られる。当該成果の一部は国際会議での発表や論文として公表している。

(7) Hypercircle equation の方法は非線形問題の解の検証についても重要な意味がある。非線形楕円型偏微分方程式に対する解の検証フレームワークは中尾充宏氏、M. Plum 氏、大石進一氏などによって、提案されていた。しかし、非凸領域における特異性の処理は大がかりな仕掛けが必要であったため、一般的な領域での解の検証は難しい問題であった。Hypercircle equation の方法により、非線形楕円型偏微分方程式の一種を検討し、任意領域におけるその方程式の解の検証

が可能となった。この結果は非線形偏微分方程式の精度保証法における大きな進展であると言える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① Xuefeng Liu, Tomoaki Okayama and Shin'ichi Oishi, High precision eigenvalue bound for the Laplacian with singularity, accepted by Proceeding of the 2012 Asian Symposium on Computer Mathematics (ASCM 2012), 査読有, May, 2014 (未発行).
- ② Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, Remarks on computable a priori error estimates for finite element solutions of elliptic problems, NOLTA, IEICE, 査読有, Vol.5, No.1, pp.53-63, 2014. DOI: 10.1587/nolta.5.53
- ③ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, Guaranteed high-precision estimation for P0 interpolation constants on triangular finite elements, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, 30(3), pp.635-652, 2013. DOI: 10.1007/s13160-013-0120-6
- ④ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, Verified eigenvalue evaluation for Laplacian over polygonal domains of arbitrary shape, SIAM J. Numer. Anal., 査読有, 51(3), pp.1634-1654, 2013. DOI: 10.1137/120878446
- ⑤ Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, Verified computations to semilinear elliptic boundary value problems on arbitrary polygonal domains, NOLTA, IEICE, 査読有, E96-N(1), pp.34-61, 2013. DOI: 10.1587/nolta.4.34
- ⑥ Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, A residual bound evaluation of operator equations with Raviart-Thomas finite element, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1791, pp.206-215, 2012.
- ⑦ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, Verified eigenvalue evaluation for Laplace operator on arbitrary polygonal domain, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1733, pp.31-39, 2011.

[学会発表] (計19件)

- ① Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, Verified lower eigenvalue bounds for self-adjoint differential operators,

Program of the International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2014 (INVA 2014), Waseda University, 2014年3月

- ② Xuefeng Liu, Michael Plum and Shin'ichi Oishi, A uniform approach to high-precision verified eigenvalue bounds for self-adjoint differential operators, 日本応用数学会 2014年研究部会連合発表会, 京都大学吉田キャンパス, 2014年3月
- ③ Xuefeng Liu, High-precision verified eigenvalue estimation for elliptic differential operator over polygonal domain of arbitrary shape, Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications (MAFELAP2013), Brunel University, UK, 2013/06.
- ④ Xuefeng Liu, Guaranteed high-precision estimation for interpolation error constant, International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2013), Santa Fe, USA, 2013/09.
- ⑤ 劉雪峰, 高精度な補間関数の誤差定数の評価について, 日本応用数学会 2013年研究部会連合発表会, 東洋大学白山キャンパス, 2013年3月
- ⑥ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, On guaranteed eigenvalue estimation of compact differential operator with singularity, 2012 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2012), Palma Majorca, Spain, 2012/10.
- ⑦ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, On high-precision eigenvalue estimation for self-adjoint elliptic differential operator and its application, The Tenth Asian Symposium on Computer Mathematics (ASCM 2012), Beijing, China, 2012/10.
- ⑧ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, A framework of high-precision eigenvalue estimation for self-adjoint elliptic differential operator, 15th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerics (SCAN' 2012), Novosibirsk, Russia, 2012/09.
- ⑨ 劉雪峰, 大石進一, 自己共役楕円型微分作用素の高精度な固有値評価について, 日本応用数学会 2012年度年会, 北海道稚内市, 2012年8月
- ⑩ Xuefeng Liu, A framework on high precision eigenvalue value evaluation for self-adjoint elliptic operator, 4th China-Japan-Korea Conference on Numerical Mathematics, Shiga, Japan,

2012/08.

- ⑪ 劉雪峰, 大石進一, 不動点定理による大規模行列の固有値の精度保証付き評価, 第41回数値解析シンポジウム, 群馬県渋川市, 2012年6月8日
- ⑫ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, On verified eigenvalue evaluation of self-adjoint elliptic differential operator, The 8th EASIAM, Taipei, Taiwan, 2012/06.
- ⑬ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, On verified computation of laplacian eigenvalues over polygonal domain, 2011 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2011), Kobe, Hyogo, Japan, 2011/09.
- ⑭ 劉雪峰, 大石進一, On verified evaluation of several interpolation error constants, 日本応用数学会 2011年度年会, 京都, 2011年9月
- ⑮ Xuefeng Liu, On computable eigenvalue evaluation for elliptic eigen-problem with singularity, Japanese-German Workshop on Computer-Assisted Proofs and Verification Methods, Karlsruhe, Germany, 2011/09.
- ⑯ 劉雪峰, 有限要素法の計算的な誤差評価とその応用, 第33回発展方程式若手セミナー, 茨城県つくば市, 2011年8月
- ⑰ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, Computer-assisted eigenvalue bounds, ICIAM 2011, Vancouver, Canada, 2011/07.
- ⑱ Xuefeng Liu, High-precision eigenvalue bounds for laplacian over general polygonal domain, Workshop on Analytic and Computational Techniques in Spectral Theory and Related Topics, Gregynog Hall, Cardiff University, UK, 2011/06.
- ⑲ Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, Numerical verification for solution existence of elliptic PDE on arbitrary polygonal domain, The 7th EASIAM, Kitakyushu Campus of Waseda University, Fukuoka, Japan, 2011/06.

[その他]

(1) 固有値のオンライン計算 :
<http://www.xfliu.org/onlinelab/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

劉雪峰 (LIU Xuefeng)
早稲田大学理工総合研究所 講師
研究者番号 : 50571220