

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：32702

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740093

研究課題名(和文) ランダムなグラフの構造とその上の確率・量子モデル

研究課題名(英文) A study on relationships between stochastic and quantum models and random graph structures

研究代表者

井手 勇介 (Ide, Yusuke)

神奈川大学・工学部・助教

研究者番号：70553999

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円、(間接経費) 540,000円

研究成果の概要(和文)：ランダムなグラフを含む種々のグラフ上の離散時間・連続時間量子ウォークの推移確率の解析を行った。離散時間量子ウォークはヤコビ行列の固有空間解析を詳しく行うことで、対象とするグラフごとの推移確率の長時間平均に関する極限定理を示した。連続時間量子ウォークについてはラプラシアン行列の固有空間解析を通じて、グラフの局所的な性質が推移確率の挙動に与える影響を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In this study, we concentrate on analysis of transition probabilities of discrete-time and continuous-time quantum walks on various graphs including random graphs. For the discrete-time case, we obtain some limit theorems for long-time average of the transition probabilities by detailed study of eigenspace of the Jacobi matrices. For the continuous-time case, we show relationships between local graph structures and the transition probabilities by detailed study of eigenspace of the Laplacian matrices.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：量子ウォーク 固有空間解析

1. 研究開始当初の背景

複雑ネットワークを含むランダムなグラフ上の確率的なプロセス(特にコンタクトプロセス)及び量子的なプロセス(特に量子ウォーク)に関する研究が進められてきていたが、グラフの構造と各プロセスの挙動との数学的な関係は不明な部分があった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、そのような背景のもとで、ランダムなグラフを含む種々のグラフの性質、特に、隣接行列やラプラシアン行列のようなグラフの構造に付随する行列の性質と、その上の確率的・量子的プロセスの挙動との関係を理解するための枠組みを構築し、これらの知見をもとに、理論・応用の両面の研究を行うことである。

3. 研究の方法

ランダムなグラフとして、しきい値モデル・ユニットディスクグラフに、確率的なプロセスとして、コンタクトプロセス・ロータールーターモデル・Q 学習に、量子的なプロセスとして、量子ウォークに、それぞれ着目して研究を行ったが、以下では、最も研究の進んだ量子ウォークに関して述べる。

量子ウォークの時間発展には、離散時間と連続時間の2種類が存在するため、まずは離散時間量子ウォークについて述べる。一般に、グラフ上の離散時間量子ウォークを定義するためには、頂点毎に、頂点の次数(頂点からのびる辺の本数)の次元を持つヒルベルト空間を用意し、隣接する頂点对に付随するそれぞれのヒルベルト空間を定義域・値域とするユニタリ作用素(ユニタリ行列)を定める必要がある。このようなユニタリ作用素の決め方は複数存在しうるが、どのようなグラフ上でも適用可能な方法として、各頂点に付随するヒルベルト空間からそれ自身へのユニタリ作用素(コイン作用素と呼ぶ)と、各辺に付随する、辺の始点に属する状態ベクトルを辺の終点に属する状態ベクトルへ推移させるユニタリ作用素(フリップフロップ型推移作用素)の積によって定義されるユニタリ作用素を用いた。

このようなタイプの離散時間量子ウォークに対して、ゼゲディの方法ではコイン作用素を適切に選ぶことによって、古典のランダムウォークと量子ウォークを対応付けることが可能である。具体的には、対象とするグラフ上の古典ランダムウォークを一つ固定して考えるとき、各頂点におけるコイン作用素を、各成分が隣接頂点への推移確率の平方根となる単位ベクトルから作られる、ハウスホルダー型のユニタリ行列とする離散時間量子ウォークを考える。このとき、 (i, j) 成分が頂点 i と頂点 j を結ぶ辺上に定義されている古典ランダムウォークの推移確率の積の平方根となるような行列(ヤコビ行列)を用意すると、その固有値・固有ベクトルを用

いて、対応する離散時間量子ウォークの時間発展を定めるユニタリ作用素の固有値・固有ベクトルを求めることができ、この情報をもとに、離散時間量子ウォークの推移確率を求めることができる。従って、ゼゲディの方法によって定義される離散時間量子ウォークの挙動を調べるために、対応するヤコビ行列の固有値・固有ベクトルを求める必要がある。

一方、本研究で扱った連続時間量子ウォークは、ラプラシアン行列と呼ばれる、対角成分が各頂点の次数となる対角行列から隣接行列を引くことで得られる行列によって定義される。具体的には、ラプラシアン行列に時刻と虚数単位を掛け合わせたものから作られる指数級数を時間発展作用素とし、初期状態と呼ぶ単位ベクトルに時間発展作用素を作用させることによって時間発展させていくモデルである。連続時間量子ウォークにおいては、ラプラシアン行列の固有値・固有ベクトルより、時間発展作用素の固有値・固有ベクトルが直接求まることから、ラプラシアン行列の固有値・固有ベクトルを求める必要がある。

何れのモデルにおいても、ヤコビ行列・ラプラシアン行列の固有空間はグラフの構造によって特徴付けられるため、これらの行列の解析を通じて、グラフの構造とその上のプロセスの挙動との関係を理解できると考え、研究を進めた。

4. 研究成果

まず、離散時間量子ウォークに関する成果について述べる。種々のグラフの性質と離散時間量子ウォークの挙動との関係を理解するために、単純な構造のグラフに対する解析から検討を行った。具体的には、一次元格子を有限の頂点に制限してできるグラフである、パスグラフ上の離散時間量子ウォークの解析を行った。対象とする量子ウォークとして、まずゼゲディの方法によって得られる、パスグラフ上の反射壁付き古典ランダムウォークに対応する離散時間量子ウォークの解析を行った。このモデルでは、ヤコビ行列の固有関数が第2種チェビシェフ多項式と呼ばれる直交多項式によって記述されることがわかり、その事実をもとに時間発展作用素の固有値・固有ベクトルを得た。時間発展作用素の解析をもとに、弱収束極限を得るには至らなかったが、推移確率の長時間平均を考え、頂点数を無限大にする極限での極限定理を得た。この極限定理では、パスグラフの両端点間の距離を1に正規化する極限を取り、古典ランダムウォークが出发点に戻りやすい条件下では再帰確率が非負の値に留まり、それ以外は一様分布することがわかった。一方で、古典ランダムウォークが出发点に戻りにくい条件下では、一様分布のみが現れる結果となり、もとなる古典ランダムウォークの性質を反映した結果となった。また、推移作用素をフリップフロップ型でないものに

変化させた場合についても検討を行った。

次に、パスグラフ上の反射壁付き古典ランダムウォークに対応する離散時間量子ウォークに帰着可能なモデルとして、グルードツリーと呼ばれる、2つの同じ根付き有限正則木の葉同士を次数を保ったままランダムにつなが合わせてできるグラフ上の離散時間量子ウォークに関する検討を行った。グルードツリーは、量子探索アルゴリズムを考える際に用いられるグラフであるが、これまで離散時間量子ウォークの検討はなされていなかった。このモデルのヤコビ行列の固有値・固有ベクトルを完全に求めることは困難であることがわかったが、ヤコビ行列の対称性を利用することで、固有方程式と固有ベクトルを形式的に求めることに成功した。ヤコビ行列の固有値・固有ベクトルの一部はわかったため、その情報をもとに、推移確率の長時間平均を考え、頂点数を無限大にする極限での挙動の一部を明らかにした。

なお、パスグラフ上のゼゲディの方法以外の定義で得られる離散時間量子ウォークの解析について、一定の条件下で各頂点に付随するコイン作用素の固有空間解析によってゼゲディの方法と同等の解析が可能であることがわかったため、その成果を口頭発表した。今後は、ヤコビ行列とグラフの構造との関係に対して一般的に得られる知見を整理することによって、グラフの構造とその上の離散時間量子ウォークの挙動との関係をより深く理解できるものと考ええる。

一方、連続時間量子ウォークの解析に関して、まず、ワッツ・ストロガッツモデルと呼ばれる、サイクルグラフにランダムにショートカット辺を何本か追加したグラフに関する検討を行った。このモデルに関係する最も単純なモデルとして、サイクルグラフにショートカット辺を追加したグラフ上で連続時間量子ウォークの挙動を解析した。対象としたグラフのラプラシアン行列の固有関数もまた、第2種チェビシェフ多項式と関連することがわかった。煩雑な計算ののちに固有方程式を整理することができたが、厳密解を求めることは困難だったため、摂動法等を用いた近似解法によって固有値・固有空間を得た。出発点をショートカット辺の一方の端点とした場合、サイクルグラフ上では起こらなかった、出発点への再帰確率が、頂点数を無限大にする極限においても正の値に留まる現象が観測された。さらに、出発点からショートカット辺の他方の端点への推移確率も同様に正の値に留まることわかり、ショートカット辺の役割の一部を解明できた。

また、ランダムなグラフの研究対象の一つとしているしきい値モデルを含むグラフのクラスとして、他の全ての頂点と辺で結ばれている頂点が存在するクラスがある。そのようなグラフを含むグラフのクラスについて、ラプラシアン行列の分解法を提案した。具体的には、対象とするグラフに対して、頂点集

合の分割を考えるとき、各分割成分から誘導される部分グラフの組に対しても、「一方の部分グラフの各頂点が他方の部分グラフの全頂点と辺で結ばれる」もしくは「一方の部分グラフの各頂点は他方の部分グラフの全頂点と辺で結ばれない」のどちらかが成り立つような分解を提案した。このような分解のもとでは、ラプラシアン行列をそれぞれの部分グラフに付随するラプラシアン行列からなるブロック対角行列と、各部分グラフを疎視化して得られるグラフのラプラシアン行列の和として分解できる。この事実を用いて、しきい値モデルを含むグラフのクラスに関して共通に得られる連続時間量子ウォークの性質が導かれるため、その結果を口頭発表した。今後は、これらの手法を発展させることによって、部分グラフの構造とグラフ全体の構造との連続時間量子ウォークにおける相関が明らかになることが期待される。さらに、同様の手法を離散時間量子ウォークについても適用可能であれば、離散時間量子ウォークについても、同様の理解が得られる可能性がある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6件)

Yusuke Ide, Norio Konno, Etsuo Segawa, Xin-Ping Xu, Localization of discrete time quantum walks on the glued trees, Entropy, 査読有, Vol. 16, No. 3, pp. 1501-1514 (2014), DOI: 10.3390/e16031501

Yusuke Ide, Norio Konno, Masato Takei, Some basic properties of a rotor-router model with i.i.d. initial rotor-routers on the line, Proceedings of SSS'13 The 45th International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 査読有, 印刷中 (2014)

Xin-Ping Xu, Xiao-Kun, Zhang, Yusuke Ide, Norio Konno, Analytical solutions for quantum walks on 1D chain with different shift operators, Annals of Physics, 査読有, Vol. 344, pp. 194-212 (2014), DOI: 10.1016/j.aop.2014.02.018

Yukio Hayashi, Takayuki Komaki, Yusuke Ide, Takuya Machida, Norio Konno, Combinatorial and approximative analyses of the scaling law in spatially random division process, Physica A, 査読有, Vol. 392, No. 9, pp. 2212-2225 (2013), DOI: 10.1016/j.physa.2013.01.025

Yusuke Ide, Norio Konno, Etsuo Segawa, Time averaged distribution of a

discrete-time quantum walk on the path, Quantum Information Processing, 査読有, Vol. 11, No. 5, pp. 1207-1218 (2012), DOI: 10.1007/s11128-012-0424-5
Xin-Ping Xu, Yusuke Ide, Norio Konno, Symmetry and localization of quantum walk induced by extra link in cycles, Physical Review A, 査読有, Vol. 85, No. 4, 042327 (2012), DOI: 10.1103/PhysRevA.85.042327

〔学会発表〕(計 7件)

井手勇介, 右田正夫, 菊池光, 今井崇雅, Q 学習による完全グラフ上の経路学習における TTL と学習経路長の関係, 電子情報通信学会 2014 年総合大会, B-7-76, 2014 年 3 月 21 日, 新潟大学五十嵐キャンパス

Yusuke Ide, Fully interconnected subgraph decomposition and continuous time quantum walks, “AMS Special Session on Quantum Walks, Quantum Computation, and Related Topics I” at 2014 Joint Mathematics Meetings, 2014 年 1 月 17 日, Baltimore convention center, Baltimore, US

Yusuke Ide, Norio Konno, Masato Takei, Some basic properties of a rotor-router model with i.i.d. initial rotor-routers on the line, The 45th International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 2013 年 11 月 2 日, 琉球大学 50 周年記念館

Yusuke Ide, Continuous time quantum walks on some graphs, 量子ウォークの数理の新展開: 物質制御への応用, 2013 年 6 月 19 日, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

Yusuke Ide, Time averaged distribution of discrete time quantum walks on the path, “AMS Special Session on Quantum Walks” at 2013 Joint Mathematics Meetings, 2013 年 01 月 10 日, San Diego convention center, San Diego, US

Yusuke Ide, Time averaged probability of DTQWs on the path with general coin, Workshop of quantum dynamics and quantum walks, 2012 年 11 月 24 日, 岡崎コンファレンスセンター

Yusuke Ide, Time averaged distribution of a discrete-time quantum walk on the

path, International Workshop on Theoretical Aspects of the Discrete Time Quantum Walk, 2011 年 11 月 7 日, Instituto de Fisica Corpuscular, Valencia, Spain

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
<http://kenkyu.kanagawa-u.ac.jp/kgdb/KgApp?kyoinId=ybygoosggg>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

井手 勇介 (IDE, Yusuke)
神奈川大学・工学部・特別助教
研究者番号: 70553999

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: