

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：13101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740097

研究課題名(和文) Banach環上のスペクトル保存写像とその摂動の安定性

研究課題名(英文) Spectrum preservers on Banach algebras and the stability of their perturbation

研究代表者

三浦 毅 (MIURA, TAKESHI)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：90333989

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：スペクトルあるいはそれに付随した情報を保存するBanach環の間の写像について、その構造を詳細に調べた。たとえば定数関数の存在を仮定せずに、関数環の間の距離を保存する写像すなわち等距離写像の構造を、線形とは限らない全射に対して解明した。スペクトルの部分集合であるperipheral spectrumを乗法的に保存する全射については、多くの研究が世界的になされているが、その一部分の情報であるスペクトル半径をある意味で保存する単位的半単純可換Banach環上全射の構造を解明した。さらに微分作用素や積分作用素の摂動を考え、そのHyers-Ulamの意味での安定性が成り立つための条件を与えた。

研究成果の概要(英文)：I investigated the structure of mappings which preserve spectra or related information between Banach algebras in detail. I gave a characterization of surjective isometries without assuming linearity between function algebras, which need not be unital. Many results on multiplicatively peripheral spectrum preserving surjections are well known. I generalized some of them and proved the structure theorem on spectra radii preserving mappings between unital semi-simple commutative Banach algebras. I gave a necessary and sufficient condition for a system of Banach space valued differential equations to be stable in the sense of Hyers and Ulam. I also gave a sufficient condition for an integral equation to have the Hyers-Ulam stability.

研究分野：関数環論

キーワード：スペクトル保存写像 等距離写像 関数環 可換Banach環

1. 研究開始当初の背景

第一可算コンパクト Hausdorff 空間 X に対して、その上の複素数値連続関数全体のなす Banach 環を $C(X)$ とする。 $C(X)$ 上の全射 S がスペクトルに関して

$$(S(f)S(g)) = (fg) \quad (f, g \in C(X))$$

をみたせば、 $S(1)$ は絶対値 1 の関数となり、ある X 上の同相写像 σ に対して

$$S(f)(x) = S(1)(x)f(\sigma(x)) \quad (f \in C(X), x \in X)$$

が成り立つ。この結果は Molnar によって証明された。この定理の興味深い点は写像 S に線形性や連続性を仮定しないにも関わらず、 S の線形性および等距離性が得られることである。この現象に魅了された世界中の多くの数学者が、より一般の Banach 環に対しても同様の結果が成り立つかを非常に活発に研究していた。特に Luttmann and Tonev はスペクトルを peripheral spectrum と呼ばれるスペクトルの部分集合に置き換えたとしても、関数環上の全射に対しては Molnar の結果と類似の現象が起こることを示した。この結果以後、Molnar によって始まったスペクトル保存写像の構造研究はその勢いをさらに増した。特に peripheral spectrum はスペクトルの最遠点集合であることから、その点までの距離であるスペクトル半径との関連が問題とされ、スペクトル半径に関する適切な条件は何か、またその条件のもとで全射の構造が解明出来るのかが世界で争われていた。それを解明するためのスペクトル半径に関する条件を導入し、単位的半単純可換 Banach 環上の全射の構造を調べるための本質的な構造は積ではなく商であることを解明したことにより、本研究は様々な方面に広がりを見せはじめていた。

2. 研究の目的

Molnar により導入されたスペクトル条件の本質を探るため、より一般化された条件を考察し、Molnar の結果を拡張する。そのため (*) $(S_1(f)S_2(g)) = (T_1(f)T_2(g)) \quad (f, g \in A)$ をみたす Banach 環 A, B_1, B_2 の間の写像の組 $S_1, S_2 : A \rightarrow B_1$ および $T_1, T_2 : A \rightarrow B_2$ の構造を解明する。具体的には

- (1) どのような Banach 環に対して(*)をみたす S_j, T_j の関係を決定出来るか？
- (2) スペクトルを他の構造に置き換えたとき、 S_j, T_j の関係を決定出来るか？
- (3) 積を和や差に置き換えたとき、 S_j, T_j の関係を決定出来るか？
- (4) 写像の組の摂動に安定性はあるか？また安定性をもつための必要十分条件は何か？

3. 研究の方法

スペクトル条件(*)を一般化することにより、スペクトルのどの部分に写像の位相的・代数的構造を決定する情報が隠されているかを解明する。これまでに関数環上の写像については構造が明らかになっているので、その結

果を単位的半単純可換 Banach 環に拡張する。単位元の存在を仮定しないときも類似の結果が成り立つことが期待される。そこで $C_0(X)$ や $L^1(G)$ および function algebras 等の具体的な非単位的可換 Banach 環に対して調べる。Molnar は積とスペクトルの関連を考察しているが、積の代わりに他の演算とスペクトルとの関係を調べることは自然な問題である。特に差を考えたものが、スペクトル半径に関する等距離写像となることから、古典的問題である等距離写像の研究と、近年盛んに行われているスペクトル保存写像の研究が結びつく。等距離写像に関しては具体的な関数空間、たとえば n 階連続微分可能な関数全体 $C^n[0, 1]$ や Lipschitz 関数全体 $Lip[0, 1]$ さらにそれらのベクトル空間値版について、様々なノルムに対する研究がなされている。古典的理論と近代的結果であるスペクトル保存写像の関連を調べるには、これらの具体的な関数空間上の等距離写像についての入念な調査が必要である。

4. 研究成果

まずスペクトルをスペクトル半径に置き換えた条件を考察した。まずは単位的可換 Banach 環上の写像について、既存の結果を拡張し統一する定理を得た。また単位元の存在を仮定せずに、function algebras 上の全射等距離写像の構造を解明した。この定理の直接の系として、単位元をもつとは限らない半単純可換 Banach 環の間のスペクトル半径に関する全射等距離写像の構造も解明された。その後、function algebras 上の全射等距離写像の表現が Choquet 境界上だけでなく Shilov 境界上でも成立することを示した。実数直線上の Banach 空間値連続写像に対して Volterra 型積分作用素の摂動が安定性をもつための十分条件は、Jung により非常に特別な場合に与えられている。そこでその結果を一般化し安定性をもつための十分条件を与えるとともに、それがある場合には必要条件となることも示した。また Banach 空間における定数係数 1 階線形連立微分方程式が安定的であるための必要十分条件は、その係数行列のすべての固有値が純虚数でないことを示した。この結果の直接の系として、Banach 空間における定数係数 n 階線形微分方程式が安定的であるための必要十分条件は、固有方程式のすべての解が純虚数でないことが得られる。この結果が既に知られていたが、その複雑な証明を簡潔に述べることも可能となった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 14 件)

1 H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi,
Real-linear isometries between subspaces of continuous functions, J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), 229--241. 査読有

2 O. Hatori and T. Miura,
Real linear isometries between function algebras. II, Cent. Eur. J. Math. 11 (2013), 1838--1842. 査読有

3 T. Miura, G. Hirasawa, S.-E. Takahasi and T. Hayata,
A characterization of the stability of a system of the Banach space valued differential equations, Math. Inequal. Appl. 16 (2013), 717--728. 査読有

4 T. Miura, S.-E. Takahasi, T. Hayata and K. Tanahashi,
Stability of the Banach space valued Chebyshev differential equation, Appl. Math. Lett., 25 (2012), 1976--1979. 査読有

5 O. Hatori, K. Kobayashi, T. Miura and S.-E. Takahasi,
Reflections and a generalization of the Mazur-Ulam theorem, Rocky Mountain J. Math., 42 (2012), 117--150. 査読有

6 T. Miura,
Real-linear isometries between function algebras, Cent. Eur. J. Math. 9 (2011), 778--788. 査読有

7 T. Miura, D. Honma and R. Shindo,
Divisibly norm-preserving maps between commutative Banach algebras, Rocky Mountain J. Math. 41 (2011), 1675--1699. 査読有

8 O. Hatori, S. Lambert, A. Luttmann, T. Miura, T. Tonev and R. Yates,
Spectral Preserver Problems in Commutative Banach Algebras, Contemp. Math. 547 (2011), 103--123. 査読有

9 G. Hirasawa, T. Miura and H. Takagi,
Spectral radii conditions for isomorphisms between unital semisimple commutative Banach algebras, Contemp. Math. 547 (2011), 125--134. 査読有

10 O. Hatori, S. Lambert, A. Luttmann, T. Miura, T. Tonev and R. Yates,
Spectral Preserver Problems in Commutative Banach Algebras, Contemp.

Math. 547 (2011), 103--123. 査読有

〔学会発表〕(計 23 件)

1 平成 27 年 3 月 23 日, 日本数学会(明治大学),
関数環上のスペクトル保存写像の拡張,
三浦 毅

2 平成 26 年 10 月 23 日, 集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野の交流(京都大学数理解析研究所),
関数空間上の全射等距離写像, 三浦 毅

3 平成 26 年 5 月 22 日, The Seventh Conference on Function Spaces (Southern Illinois University at Edwardsville),
Surjective isometries between function spaces, T. Miura

4 平成 25 年 11 月 2 日, Complex Analysis and Applications '13 (The Institute of Mathematics and Informatics, Bulgaria),
Isometries between function spaces, H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi

5 平成 25 年 9 月 25 日, 日本数学会(愛媛大学),
関数環上の全射等距離写像, 三浦 毅

6 平成 24 年 5 月 15 日, International Conference on Mathematics and Statistics (University of Memphis),
Surjective Isometries between function algebras, T. Miura

7 平成 24 年 5 月 11 日, Department of Mathematical Sciences, Colloquium Series (The University of Montana),
Surjective Isometries between function spaces, T. Miura

8 平成 23 年 11 月 1 日, Research on preserver problems concerning to Banach algebras and its applications (RIMS, Kyoto University),
Real linear isometries between function algebras, T. Miura

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三浦 毅 (MIURA, Takeshi)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：90333989

(2) 研究分担者

()
研究者番号：

(3) 連携研究者

()
研究者番号：