

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 31 日現在

機関番号：11601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740098

研究課題名(和文)リーマン面のモジュールの複素多変数的変動についての研究

研究課題名(英文)Research on variations of invariants on Riemann surfaces under pseudoconvexity

研究代表者

濱野 佐知子 (Hamano, Sachiko)

福島大学・人間発達文化学類・准教授

研究者番号：10469588

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：複素パラメータと共に変動する境界つきリーマン面上の調和スパンおよびシッファースパンの2階変分公式を求め、擬凸変動におけるパラメータ依存性を調べることにより、変形族の同時一意化問題へと応用した。ショットキー被覆面の同時一意化定理を示し、更にそれを一般化した、解析的でディリクレ積分が有限である関数族は定数のみからなるリーマン面全体のなす族 $O_{\{AD\}}$ に属するプレーンリーマン面の変形族がスタインならば同時一意化可能であることを証明した。

研究成果の概要(英文)：We showed the variation formulas of the second order for harmonic spans and Schiffer spans on Riemann surfaces with one complex parameter, and applied them to solve the simultaneous uniformization problem. As an application of this result, we proved the uniformity of holomorphic families of non-homeomorphic planar Riemann surfaces of class $O_{\{AD\}}$.

研究分野：数学・基礎解析学

キーワード：関数論 多変数関数論 複素解析 スタイン多様体 ポテンシャル論 等角写像 擬凸

1. 研究開始当初の背景

複素パラメータ t と共にリーマン面 $R(t)$ が関数論的に歪曲しながら変動するとき、 $R(t)$ 上のロバン定数およびベルグマン核の動きについて、米谷文男-山口博史氏 (2004) は t に関する 2 階変分公式を求めることにより明記し、リーマン面の変動が擬凸ならばロバン定数は優調和であり、ベルグマン核は対数的多重劣調和であることを示された。また、B.Berndtsson 氏 (2006) はその結果を高次元に拡張され、辻元氏や高山茂晴氏らによる応用結果も得られ、M.Brunella 氏など領域変分理論は正則葉層理論の観点からも注目されている。

グリーン関数と同じ対数極をもち、全ての境界成分で定数かつフラックス 0 という L_1 -境界条件を満たす調和関数を L_1 -主関数という。研究代表者はこの定数項 L_1 -定数のパラメータ依存性について考察し、変分公式を求めることにより、変動が擬凸ならば劣調和であることを 2010 年に証明した。一方、ポテンシャル論では L_1 -主関数に対し、全ての境界成分で外法線微分が 0 という L_0 -境界条件を満たす調和な L_0 -主関数も定義されており、 L_1 -主関数および L_0 -主関数が誘導する正則関数は多重連結領域をそれぞれ円弧スリット領域および放射スリット領域に等角に写す。そこで研究代表者は、等角写像論において L_1 -主関数に好対である L_0 -主関数について同様の考察を行うと、予想に反し、対数極を 1 つもつ L_0 -主関数から誘導される L_0 -定数では同様の変分公式は成立しないことが判明した。しかしながら、対数極を 2 つもつ L_0 -定数については 2 階変分公式が成立する手応えを得ており、これまでの研究成果を踏まえ、一変数関数論における多重連結領域の等角写像およびポテンシャル論における各主関数のノイマン問題と、多変数関数論的変動である擬凸状とがうまく結びつけられないかという着想に至った。

2. 研究の目的

一変数関数論における多重連結領域の等角写像およびポテンシャル論における各主関数のノイマン問題と、多変数関数論的変動である擬凸状との関係を明らかにすることが本研究の目的である。具体的には、複素パラメータと共にリーマン面が動いたときに、各リーマン面の等角写像に関連したモジュールが複素多変数的に変動するようなものを見つけ、一変数的量変動と多変数関数論、特に擬凸状領域との関連を引き起こす原理を追求することである。

3. 研究の方法

リーマン面が複素パラメータと共に関数論的に歪曲しながら変化するとき、調和スパンの動きについて得られた 2 階変分公式を手がかりに、Schiffer スパンなどのリーマン面の等角写像に関連したモジュールを見出

すことで、一変数的量変動と多変数関数論、特に擬凸状領域との関連を引き起こす原理を追求する。そのために、等角写像論やポテンシャル論的手法からアプローチしながら、具体例の構成を通して多様性を解明すると共に、多変数関数論的性質を明らかにする。

問題を次のように分類し研究を遂行する。

- (1) L_1 -定数の変分公式とその応用についての研究。
- (2) L_1 -定数と L_0 -定数の差である調和スパンの変分公式とその応用についての研究。
- (3) 不連続点を含む変動への拡張についての考察。
- (4) 多変数版 Schiffer スパンの性質を考察。
- (5) Schiffer スパンの変分公式とその応用についての研究。

本研究の研究成果は随時国内外の研究集会で発表する。また、定期的にセミナーに参加し、情報収集を行い研究に役立てる。

4. 研究成果

(1) L_1 -定数の変分公式を求め、変動が擬凸ならば L_1 -定数は劣調和であることを示した。応用として、種数 2 以上のコンパクトリーマン面からなる正則族に対し、各ファイバーのショットキー被覆面からなる変形族の同時一意化定理を証明した。その詳細は Michigan Math に単著論文として出版された。

(2) L_0 -定数の変分公式は種数による積分項を含む形で導くことに成功した。これよりファイバーを種数 0 のプラナーリーマン面に制限すると、変動が擬凸ならば L_0 -定数は優調和であることが証明できた。更に、 L_1 および L_0 -主関数の変分公式を結合して得られる調和スパンの 2 階変分公式を明記し、ファイバーがプラナーリーマン面からなる変動が擬凸ならば調和スパンは劣調和であることを示した。また、領域の変動が擬凸ならば各ファイバーの 2 点間のポアンカレ距離はある劣調和性をもつことを示し、応用を得ることに成功した。その詳細は Nagoya Math に山口-米谷氏との共著論文として出版された。

(3) 上述(1),(2)で求めた変分公式は、各主関数が調和接続できるように境界の実解析的な滑らかさを必要とするため、得られた応用結果は滑らかな変動に制限される。本研究では、ファイバーが特異点を含みトポロジーが変わるようなある $(C1)$ -タイプのスタイン多様体まで結果を拡張することに成功した。その詳細は JMSJ に単著論文として出版された。

(4) 一変数の Schiffer スパンを利用して多変数の領域での Schiffer 関数を定義し、その対数関数が複素多変数の多項式凸領域で完備な多重劣調和関数になることを証明した。その詳細は RIMS 講究録別冊に単著論文として出版された。

(5) 多重連結領域を垂直および平行スリット領域へ写す等角写像が誘導する極 $\operatorname{Re} 1/z$ をもつ主関数について(1),(2)と同様の考察を行い, 同じタイプの変分公式が成立することを示した. 更に, Schiffer スパンは変動が擬凸ならば対数的劣調和であることを証明した. 応用として, 解析的でディリクレ積分が有限である関数族が定数のみからなるリーマン面全体のなす族 $\mathcal{O}_{\{AD\}}$ に属しプラナーであるリーマン面の变形族がスタインならば同時一意化可能であることに成功した. その詳細は Polon. Math に単著論文として出版された. この結果は(1)で求めた応用結果の一般化になっている.

(6) プラナーリーマン面の調和スパンおよび Schiffer スパンから誘導される計量は完備で負曲率であることを示した. また, プラナーリーマン面からなる正則族が複素 2 次元スタイン多様体の場合, それらの計量は対数的多重劣調和であることを証明し, 論文としてまとめ投稿中である.

(7) 2013 年度多変数関数論冬セミナーを福島市で主催し, 参加者と多くの意見交換を行うことができ大変有意義であった.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

Sachiko Hamano, Uniformity of holomorphic families of non-homeomorphic planar Riemann surfaces, Annales Polonici Mathematici, 111.2 (2014), 165-182. 査読有り.

DOI 10.4064/ap111-2-5

Sachiko Hamano, Schiffer functions on domains in \mathbb{C}^n , RIMS Kokyuroku Bessatsu, B43 (2013), 17--28. 査読有り
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/B43-contents.pdf>

Makoto Abe, Sachiko Hamano, and Junjiro Noguchi, On Oka's extra-zero problem and examples, Mathematische Zeitschrift, 275 (2013), 79--89. 査読有り
DOI 10.1007/s00209-012-1123-8

Sachiko Hamano, \mathcal{C}^1 subharmonicity of harmonic spans for certain discontinuously moving Riemann surfaces, Journal of the Mathematical Society of Japan, 65 No.1 (2013), 321--341. 査読有り
DOI 10.2969/jmsj/06510321

Sachiko Hamano, Fumio Maitani and Hiroshi Yamaguchi, Variation formulas for principal functions (II) Applications to

variation for harmonic spans, Nagoya Mathematical Journal, 204 No.2 (2011), 19--56. 査読有り
DOI 10.1215/00277630-1431822

Sachiko Hamano, Variation formulas for L_1 -principal functions and application to simultaneous uniformization problem, Michigan Mathematical Journal, 60 No.2 (2011), 271--288. 査読有り
DOI 10.1307/mmj/1310667977

濱野佐知子, Schiffer span の複素多変数的変動について, ポテンシャル論研究 2011 (2011), 6--13. 査読無し

[学会発表](計 23 件)

Sachiko Hamano, Variations of the metric induced by the reproducing kernel for semi-exact analytic differentials, Geometry And Its Applications Seminar on Complex Analytic Geometry, Pohang University of Science and Technology (KOREA), 2015 年 3 月 9 日 (招待講演).

濱野佐知子, 主関数の変分公式とその応用について, 数学物理合同特別セミナー, 大阪市立大学理学研究科 数学研究所, 2015 年 2 月 20 日 (招待講演).

Sachiko Hamano, On the reproducing kernel for the space of semi-exact analytic differentials, リーマン面・不連続群論研究集会, 大阪大学中之島センター, 2015 年 2 月 16 日 (招待講演).

濱野佐知子, 円環における半完全正則微分のなす空間の再生核, 日本数学会 2014 年度季総合分科会 函数論分科会, 広島大学, 2014 年 9 月 25 日.

Sachiko Hamano, Representation on annuli of reproducing kernels for the space of semiexact analytic differentials, ベルグマン核を巡る解析幾何の話題, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 9 月 8 日 (招待講演).

Sachiko Hamano, Variational formulas for principal functions and applications, Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XVII, Shonan-village center (JAPAN), July 22, 2014 (招待講演).

Sachiko Hamano, Variation formulas for principal functions and application to simultaneous uniformization and reproducing kernels on Riemann surfaces, The XVII Conference on Analytic Functions and Related Topics, Institute of

Mathematics and Computer Science of The State School of Higher Education in Chelm (POLAND), July 2, 2014.

濱野佐知子, 半完全正則微分のなす空間の再生核の多変数的変動, 日本数学会 2014 年度年会 函数論分科会, 2014 年 3 月 16 日, 学習院大学.

濱野佐知子, 半完全正則微分のなす空間の Bergman 核について, 第 5 回東北複素解析セミナー, 2013 年 11 月 27 日, 東北大学情報科学研究科棟 6 階小講義室.

濱野佐知子, Variation of the metric induced by Schiffer and harmonic spans, 名古屋大学 解析幾何学セミナー, 2013 年 10 月 28 日, 名古屋大学多元数理科学研究科 309 講義室.

Sachiko Hamano, Log-plurisubharmonic ity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans, Geometry And Its Applications Seminar on Complex Analytic Geometry, August 30, 2013, Pohang University of Science and Technology, KOREA.

濱野佐知子, 多変数関数論冬セミナー 2012, Log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans, 東北大学理学部・数理科学記念館(川井ホール), 2012 年 12 月 21 日.

濱野佐知子, 富山大学理学部数学科談話会, 主関数の変分公式とその応用, 富山大学理学部 B 棟 1 階 B121 室, 2012 年 11 月 1 日.

濱野佐知子, 日本数学会 2012 年度数秋季総合分科会 函数論分科会, Schiffer span と harmonic span が導く負曲率計量の多変数的変動, 九州大学, 2012 年 9 月 19 日.

Sachiko Hamano, RIMS meeting: Potential Theory and its Related Fields, Variation for the metrics induced by Schiffer and harmonic spans, 京都大学, 2012 年 9 月 4 日.

濱野佐知子, 鳥羽微分トポロジー 2012, Log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer spans, 鳥羽市民文化会館, 2012 年 8 月 8 日.

濱野佐知子, 東京大学複素解析幾何セミナー, Log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans, 東京大学数理科学研究科, 2012 年 6 月 4 日.

濱野佐知子, Schiffer span および

harmonic span による再生核の表現とその応用, 日本数学会 2012 年度年会函数論分科会, 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学.

Sachiko Hamano, Several Complex Variables Laboratory's Seminars, A representation of reproducing kernel by using spans, Pohang University of Science and Technology (KOREA) March 19, 2012.

濱野佐知子, Schiffer span および harmonic span による再生核の表現とその応用, リーマン面・不連続群論研究集会, 2012 年 1 月 7 日, 名古屋大学多元数理科学研究科.

21 濱野佐知子, 再生核の Schiffer span による表現とその応用, 等角写像論・値分布論研究集会, 2011 年 12 月 3 日, 金沢大学サテライトプラザ.

22 濱野佐知子, Schiffer span の複素多変数的変動について, 2011 年度ポテンシャル論研究集会, 2011 年 11 月 4 日, 岐阜大学教育学部.

23 濱野佐知子, Variation formulas for Schiffer span, 玉原多変数複素解析研究集会, 2011 年 9 月 23 日, 玉原セミナーハウス.

〔図書〕(計 2 件)

濱野佐知子, 砂田利一, 斎藤毅, 平松豊一, 金子昌信, 渋川元樹 など, 日本評論社 Vol.53 no.12_638, 数学セミナー 2014 年 12 月号 特集「三角函数」, 2014 年, 96 ページ (『複素の世界での三角関数』 pp.18--22 執筆担当).

濱野佐知子, 川平友規, 小森洋平, 中西敏浩, 志賀啓成, 谷口雅彦 など, 日本評論社 Vol.52 no.9 623, 数学セミナー 2013 年 9 月号 特集「深遠なる複素関数」, 2013 年, 96 ページ (『正則関数について』 pp.14--19 執筆担当).

〔その他〕

ホームページ等

<http://kojinyoseki.adb.fukushima-u.ac.jp/top/details/59>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

濱野 佐知子 (HAMANO, Sachiko)
福島大学・人間発達文化学類・准教授
研究者番号: 10469588

(2) 研究分担者

なし

(3)連携研究者
なし