

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 31 日現在

機関番号：17601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740099

研究課題名(和文)連続体近似による天文現象のモデル化と数学解析

研究課題名(英文) Mathematical modeling and analysis of astronomical phenomena on the basis of continuum approximation

研究代表者

梅原 守道 (Umehara, Morimichi)

宮崎大学・工学部・准教授

研究者番号：40532164

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円、(間接経費) 570,000円

研究成果の概要(和文)：天体内部などの天文現象を連続体近似を用いてモデル化し、数学解析を行った。主要な成果は次の二つである。(1)天体を構成するガスを理想気体とし、その運動が一次元的である場合に、小さくない初期データから始まる運動が長時間安定して存在するための十分条件(周囲の環境に関する条件)を得た。(2)ガスが三次元球対称運動をしている場合にも、(1)とほぼ同等の結果を得た。これらの成果は報告者によって前身となるものが既に得られていたが、本研究により本質的な点での改良および精密化に成功した。

研究成果の概要(英文)：We mathematically modeled, on the basis of continuum approximation, some astrophysical phenomena including the inner one of astronomical bodies, and mathematically analyzed them. We obtained the following main two results: (1) On the case that a star is composed by the ideal gas and its motion is spatially one-dimensional, we found a certain condition, concerning external circumstances of the star, guaranteeing that the motion of the gas exists long-time and stably; (2) On the case that the gaseous motion is spherically symmetric in three-dimension, we obtained the result nearly equivalent to the one in (1). Although a precedent result of our study has already been obtained by the present reporter, we succeeded in refining them at some essential points.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：Navier-Stokes方程式 自由境界問題 圧縮性粘性流体 自己重力 天体の連続体モデル

1. 研究開始当初の背景

本研究は、天体の内部やその周辺の天文現象を連続体近似を用いてモデル化し、モデルを数学的に解析することで現象のしくみを明らかにしようとするものである。宇宙における様々な現象は、近年観測の発展や物理理論の深化によって詳細が明るみに出ようとしている。その一方、数学においては、宇宙のような具体的な現象をターゲットとする研究はあまり進んでいないといえる。そのような状況のもと、本研究では特に天文現象に焦点を当てて、それを扱える数学理論や解析手法の整備構築を目指した。

天体（恒星）は水素などの気体から構成されており、その運動は流体（連続体）の基礎方程式を用いて記述される。流体方程式の信頼性は工学的な応用面などから既に実証済みといえるが、数学的には方程式の強い非線形性が原因で、一般理論の構築は難しいというのが現状である。代わって、注目する現象ごとに適当なモデル化と解析手法を開発していくことになる。天文現象も複雑な物理過程を含んでおり、そのモデル化や解析は容易ではない状況であった。

天体モデルの運動は、「自由表面（自由境界）を持ち、自己重力の場のもとにある圧縮性かつ粘性かつ熱伝導性の流体（以上の性質を持つ流体を以下では「流体星」と呼ぶ）」の初期値境界値問題（自由境界問題）として定式化される。数学的には、適当な（物理的にリーズナブルな）初期値から出発してこの問題の解の存在と一意性が保証できるか、さらには解の具体的な挙動が得られるかなどが研究すべき点となる。この問題はすでに、時間局所的には十分に一般的な設定下で解かれており、問題の数学上の「適切性（well-posedness）」は示されていると言える。したがってここに至り注力すべきは解の時間大域的な側面であり、長時間の解の一意存在や解のふるまい（漸近挙動）をどれだけ方程式から導き出せるか、である。観測や物理の理論との照合が期待される点もまさにこの点であるといえるが、これに対する数学的に決定的といえるような解答は未だ得られていない状況であった。

そのような中、ガスの運動を空間一次元に限った場合には、固定境界で外力場なしの粘性ガスの運動を考察した Kazhikhov-Shelukhin (1977) の結果に端を発し、いくつかの粘性ガスのモデルで、任意の大きさの滑らかな初期データから滑らかな解が長時間一意に得られることが示された。自由表面を持つ粘性ガスのモデルに対しても、外力場なしではあるが Nagasawa (1988) により Kazhikhov らのものと同様の結果が得られた。以降、一次元運動に関しては様々な粘性ガスのモデルが活発に研究され、成果も多数報告されている。しかし、流体星の最大の特徴である「自己重力」と「自由表面」を同時に含むようなモデルに対して数学的に決定的と言えるような

結果は無く、そのため既存の研究結果の大部分が天文現象には応用が利かない、といった状況であった。

報告者はこれまで主に、流体星の一次元運動を研究してきた。本研究の開始当初は、報告者らのそれまでの研究によって、流体星の一次元問題または三次元球対称問題における解の時間大域的な存在と解の一意性について肯定的な結果が得られていた。小ささを仮定しない滑らかな初期データから任意に大きい時間までの滑らかな解の一意存在が証明されており、問題の可解性という観点からはこれは十分な結果と言える。一方、解の長時間のふるまい（時間漸近挙動）については、報告者によって部分的な結果は得られていたものの、未だ十分に解明されていない状況であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、流体星モデルの長時間挙動や安定性を詳しく調べることである。数学的に長時間挙動を調べるときには、極限操作で時間を無限大に取ることを考えるため、解の評価はほぼすべて時間一様なもので得ておく必要があり、これは一般に容易でない仕事である。そのため、本研究では考察する流体星モデルの運動を一次元または三次元球対称運動に限定し、これまでの研究で積み上げてきた既存のいろいろな解の評価を利用または改良し、長時間挙動の解明に必要な解の評価を完全に得ることを目標とした。これは、運動を一次元（または三次元球対称）に限ったとしても数学的には決して易しくないということと、流体星の数学解析の本質的な点の攻略は、一次元（または三次元球対称）で完遂されれば多次元の場合にもじゅうぶんな見通しが得られる、と報告者は考えていることに基づく。

3. 研究の方法

研究推進の柱は、報告者自身による単独での考察である。すなわち、関連する文献を収集、精読し、自身のアイデアに基づき紙面上での計算を行った。また、他研究者との質疑応答や討論も研究の推進に欠かせないものであり、国内外の研究集会に積極的に参加し、自身の研究成果を発表する機会を求めた。本研究では特に、谷温之氏（慶應義塾大学名誉教授）を研究協力者として位置づけており、氏とは定期的に会合の機会を設け、討論した。また、報告者が主催者のひとりとなって、現象解析に焦点を当てた定期研究集会：「現象解析特別セミナー」を発足させた（2012年3月に第1回を開催し、その後毎年2回定期開催した）。こういった場を通して、他研究者との情報交換や議論に努めた。

数学的には、流体星モデルの解の長時間挙動を得るために、本研究では次のような解析手法をとった。

(1) Euler 座標系において自由境界問題とし

て定式化されたオリジナルの問題を、質量 Lagrange 変換により固定境界上の問題へと変換した。

- (2) Lagrange 座標系における問題の定常問題を考察し、定常解の存在および一意性を調べた。
- (3) Lagrange 座標系における問題（時間発展の問題）の解の a priori 評価を時間一様な形で導出した。本研究では解を Hölder 空間で構成するため、解の a priori 評価としては Hölder-norm のものが必要になるが、それを得るためにまずは適当な Sobolev 空間において解の評価を求めておき、それを用いて Hölder 空間における目標の評価を得る、といった手法をとった。
- (4) (3)で得られた時間に依存しない解の評価を用いて、解の長時間挙動を調べた。物理的には解は(2)で得られた定常解に時間収束することが期待されるが、その厳密な証明を目指した。

4. 研究成果

本研究では以下のような成果が得られた。このうち主要なものは以下の(1)(2)である。

- (1) 理想気体の流体星モデルの一次元問題に対し、モデルの解が長時間安定して存在しかつ系の定常解へ時間収束するための十分条件（仮定）を発見した。ここでいう条件とは、流体星の置かれる周囲の環境を制限するようなものであり、粗くいえば外圧（流体星の外から表面に向かってかかる圧力）と流体星を構成するガスの比熱を関係づけるような条件になっている。ガスが自己重力作用下にある場合、流体星の周囲の環境になんら制限をつけずに系の長時間挙動を得ることは現状では本質的に困難であり、いっぽうこの種の条件があれば長時間挙動が得られるであろうことは既に報告者らの先行研究によって提唱されていたところであった。本研究によって、そういった条件として決定版といえる精密なものが発見された。当該の条件は、流体星にとって物理的にリーズナブルといえるものを含んでいいると考えられ、この結果は査読付き学術雑誌に掲載されるとともにいくつかの国際会議での発表において評価を受けた。
- (2) 理想気体の流体星モデルの三次元球対称問題に対し、(1)と同様に、モデルの解が長時間安定して存在しかつ系の定常解へ時間収束するための十分条件（仮定）を発見した。この問題は、一次元問題に比べて三次元的な運動の要素が強いためか、得られた条件は一次元問題と同等といえるものではなく、一次元問題のときよりも流体星の置かれる環境に関して強い制限を要求する条件になっていた。報告者は、物理的な見地からこの条件には改良の余地があると考えており、本研究の期間中、条件の精密化に取り組んだ。しかし、解の

評価を種々改良することで部分的な精密化を進めることはできたが、決定的な意味で条件を改良（緩和）するまでには至らなかった。この課題の解決は持ち越しとなったが、この取組を通して流体星の安定性に関する問題の本質をよりはっきりと掴むことができたと考えている。この研究の成果については、国際ワークショップを含むいくつかの研究集会で発表し、発表論文を載せた報告集も出版された。

- (3) (2)と同じく理想気体の三次元球対称運動について、中心核の表面および自由表面で熱の出入りのあるモデルを考察した。対応する定常問題を調べ、定常解の様子を概ね明らかにできた。また、解の時間大域的な a priori 評価のうち、重要なものをいくつか得ることに成功した。しかしながら、この問題の本質的な難点は本研究期間中には克服されなかった。この課題は現象数理的な観点から重要と考えており、今後も鋭意取り組んでいく所存である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計3件)

[1] M. Umehara, Free-boundary problem of the equations for flows of viscous heat-conducting and self-gravitating gas, In: Mathematical analysis in fluid and gas dynamics (The 15th workshop), edited by T. Kobayashi and T. Iguchi, 75-83, RIMS Kokyuroku, **1883**, RIMS Kyoto Univ., 2014. (査読なし)

[2] M. Umehara, Large-time existence of the spherically symmetric flow of a self-gravitating viscous gas, In: Unified understanding of self-organizations in N-body systems governed by long-range, edited by Y. Yatsuyanagi and H. Ohtsuka, 105-115, RIMS Kokyuroku, **1885**, RIMS Kyoto Univ., 2014. (査読なし)

[3] M. Umehara and A. Tani, Free-boundary problem of the one-dimensional equations for a viscous and heat-conductive gaseous flow under the self-gravitation, Math. Mod. Meth. Appl. Sci., **23** (2013), 1377-1419. (査読あり)

〔学会発表〕(計9件)

[1] 梅原守道, 自己重力粘性ガスの時間大域的な運動について, 第3回 弘前非線形方程式研究会, 弘前大学, November 18, 2013.

[2] 梅原守道, 星の脈動の方程式について, 現象解析特別セミナー第4回, 東京理科大学, September 28, 2013.

[3] M. Umehara, Free-boundary problem of the equations for flows of viscous heat-conducting

and self-gravitating gas, RIMS workshop on Mathematical analysis in fluid and gas dynamics (The 15th workshop), RIMS Kyoto Univ., Japan, July 11, 2013.

[4] 梅原守道, Large-time existence of the spherically symmetric flow of a self-gravitating viscous gas, RIMS 共同研究: 長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解を目指して, 京都大学数理解析研究所, June 21, 2013.

[5] M. Umehara, On a spherically symmetric motion of a self-gravitating viscous gas, Parabolic and Navier-Stokes Equations 2012, Palac Bedlewo (Institute of mathematics of the Polish academy of sciences), Bedlewo, Poland, September 7, 2012.

[6] M. Umehara, Spherically symmetric flow of the self-gravitating viscous gas over the rigid core, Third China-Japan workshop on mathematical topics from fluid mechanics, Northwest Univ., Xi'an, China, October 25, 2011.

[7] 梅原守道, Global existence of the spherically symmetric motion of a self-gravitating viscous gas over the rigid core, 第7回 非線型の諸問題, 熊本大学, September 24, 2011.

[8] M. Umehara, Global existence of the spherically symmetric flow of a self-gravitating viscous gas, The 4th MSJ-SI Nonlinear dynamics in partial differential equations (in contributed talks), Kyushu Univ., Japan, September 20, 2011.

[9] 梅原守道, 自己重力粘性ガスの球対称な流れの長時間存在, 日本流体力学会年会 2011, 首都大学東京, September 7, 2011.

〔その他〕

個人 Web ページ :

<http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/umehara/index.html>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

梅原 守道 (UMEHARA MORIMICHI)

宮崎大学・工学教育研究部・准教授

研究者番号 : 40532164