

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 14 日現在

機関番号：15301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740107

研究課題名(和文) 確率解析を用いた無限次元空間上の微分作用素の多角的研究

研究課題名(英文) Multilateral research on infinite dimensional differential operators via stochastic analysis

研究代表者

河備 浩司 (KAWABI, HIROSHI)

岡山大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：80432904

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：無限次元空間上のある微分作用素の一意性問題および対応する確率過程の構成問題の研究を中心に行った。特に、場の量子論に現れるGibbs測度を可逆測度としてもつDirichlet作用素の一意性および対応する拡散過程の確率偏微分方程式を用いた特徴付けに関する研究の一部は海外専門学術誌に出版された。また振動型汎関数積分の漸近挙動の精密化をRough Path理論とマリアヴァン解析を組み合わせる研究し、海外研究集会での招待講演において成果発表を行った。またこの研究に刺激を受け、三角格子上の非対称ランダムウォークの長時間漸近挙動に関する研究も行い、研究成果は国内学術誌に掲載されることになった。

研究成果の概要(英文)：I mainly studied uniqueness problems of differential operators and corresponding stochastic dynamics on infinite dimensional spaces via stochastic analysis. In particular, I proved strong uniqueness of Dirichlet operators for Gibbs measures which appear in quantum field theory and constructed a unique solution to the corresponding stochastic PDE by using Dirichlet form theory. Besides, I studied precise asymptotic behavior (i.e., the method of stationary phase) of some oscillatory functional integrals by combining Rough Path theory with Malliavin calculus. Motivated by this study of the stationary phase method, I also obtained an explicit effect of non-symmetry on the long time asymptotic behavior for a class of non-symmetric random walks on the triangular lattice.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：確率解析 経路空間 微分作用素 一意性定理 確率偏微分方程式 Rough Path理論 推移確率 漸近挙動

1. 研究開始当初の背景

解析学や幾何学では様々な場面で2階の微分作用素が重要な対象として登場するが、この作用素が生成する拡散半群は、Brown運動をインプットとする確率微分方程式および確率偏微分方程式の解を用いた汎関数積分表示を持ち、この作用素の解析に確率解析の立場が重要となってくる。また確率解析的なアプローチは、状態空間が無限次元の場合でも有効に働くという利点は見逃せない。本研究はこの立場から、場の量子論における確率過程量子化プログラムから派生した無限次元空間上の2階微分作用素、確率過程、汎関数積分の漸近挙動に対する新たな解析理論の構築を目論んで開始されたものである。

2. 研究の目的

本研究課題では、上記の状況および前研究課題「確率解析を用いた無限次元空間上のヘルマンダー型微分作用素に関する研究」でやり残したことも考慮し、2つの研究

(1) 場の量子論から派生した経路空間や超関数の空間上のGibbs測度に関するDirichlet作用素なる2階の微分作用素の一意性問題および対応する確率過程を解にもつ確率偏微分方程式の研究、またこのモデルを含むような無限次元空間上の実解析(Riesz変換の有界性)の基礎研究

(2) Rough Path理論およびマリアヴァン解析を用いた無限次元拡散過程の構成、漸近挙動の研究、特に停留位相法と呼ばれる振動型汎関数積分の漸近挙動の精密化の研究

を行う。

3. 研究の方法

研究課題に関連する基本文献や論文を購入し、自らの手で分析し、新たな計算を行い、共同研究者と議論を行い、理解を深めていった。特に本研究はS. Albeverio氏(Bonn大)、M. Röckner氏(Bielefeld大)との共同研究も含むため、研究打合せのために数回のドイツ出張を行った。

また最新の研究動向を把握し、研究に対する新たな知見を得るためには、関連分野の研究集会・セミナーに参加し、専門家と情報交換や議論を行うことも必要となる。特に2012年1月にS. Tindel氏(フランス Nancy大)を囲んだ研究集会「Rough Path解析とその周辺」を、稲浜 譲氏(名古屋大学)と開催し、Rough Path理論に関する新たな研究動向を知ることができたのは有益であった。

さらに「岡山解析・確率論セミナー」に他大学から講演者を招き、関連分野の情報収集を行い、岡山周辺の解析学研究的活性化を図ったが、数人分の旅費を本研究費からサポートすることができたのも大変ありがたかった。

4. 研究成果

(1) (無限体積)経路空間上のGibbs測度に関するDirichlet作用素の一意性問題を、Dirichlet形式と確率偏微分方程式を組み合わせるAlbeverio, Röckner両氏の共同研究として行った。特に $P(\varphi_{\{1\}})$ -量子場モデルだけでなく $\exp(\varphi_{\{1\}})$ -量子場モデルをGibbs測度の例に取り扱ったことが新しい点である。このGibbs測度は有限次元空間上のSchrödinger作用素の基底状態を通して定まることがよく知られており、この研究にて基底状態の指数減衰の精密評価がカギとなっていることの理解が深まった。また問題のDirichlet作用素に対応する拡散過程の確率偏微分方程式の解としての特徴付けの際にも、この精密評価は役立ち、最終的には一意強解を構成することができた。この研究成果をまとめた論文[2]は海外専門学術誌に掲載された。

また $P(\varphi_{\{2\}})$ 量子場モデルのtoy modelとしてAlbeverioとHoegh-Krohnにより導入された $\exp(\varphi_{\{2\}})$ -量子場モデルに現れる超関数空間上のGibbs測度は、対数凹性という非常によい性質を持っている。それにも関わらず(カットオフが入った場合にすら)、これに関する確率過程量子化プログラムに現れるDirichlet作用素の一意性問題は今まで論じられていなかった。そこで、Albeverio, S. Michalache, Röcknerの3氏との共同研究という形でこの問題に取り組み、指数相互作用項の中のcharge定数がある程度小さい場合に、Dirichlet作用素の L^p -一意性および対応する拡散過程の確率偏微分方程式での特徴付けを示すことができた。この確率偏微分方程式のノイズの正則化の影響により、なおこの問題では論文[2]で用いたような対数凹性を直接生かした手法は適用できない。よってDirichlet作用素の L^p -一意性を示す際には、charge定数とノイズの正則化のバランスが保たれる条件の下で議論を進める必要がある。この成果はある意味で、Liskevich-Röckner('98)が(カットオフが入った) $P(\varphi_{\{2\}})$ -モデルに対してやったことの拡張になっており、最終年度の講演[3,4]にて口頭発表した。現在はこのcharge定数の条件を緩めようと証明の改良を行っている。最終的な成果をまとめた論文は次年度以降に完成させる予定である。

(2) 以前の稲浜氏との共同研究で、P. Malliavinによって定式化されたループ空間上のBrown運動のRough Path理論を用いた構成および大偏差原理の精密化としてのLaplace型汎関数積分の漸近挙動の研究を行ったが、この内容に関する招待講演[15]を確率論関係では最大規模の国際学会「第35回SPA」にて行った。さらにこの汎関数積分を包括するような振動型汎関数積分に対する停留位相法は準古典解析の諸問題において自然に現れる。そこで本研究(稲浜氏との共同研究)では、以前の手法(Rough Pathの意味での確率Taylor展開)とマリアヴァン解析のBismut-Malliavin部分積分公式を組み合わせることで、ループ空間上のBrown運動や、分数Brown運動が駆動する有限次元空間上のRough differential equationに対する停留位相法を確立した。この成果をRough Path

理論の国際研究集会における招待講演[2]で口頭発表した。またここ数年の Rough Path 理論の目覚ましい発展により、分数 Brown 運動 を含むさらに広範囲な Gauss 過程が駆動する微分方程式も取り扱えるようになり、研究開始当初では想定していない枠組みでこの成果が整理される見込みとなっている。最終的な成果をまとめた論文は、次年度に完成させる予定である。

(3) 上記の研究(2)に影響を受け、三角格子上のある非対称性をもつランダムウォークの推移確率の長時間漸近挙動の研究を、大学院生の照屋 翼 氏、石渡 聡 氏(山形大)と行った。ランダムウォークが対称な場合はこのような問題は古典的であり、現在では小谷元子・砂田利一両氏により結晶格子の枠組みでかなり広範囲のグラフに対して幾何学的な意味も込めて論じられている。その一方で、三角格子上では、非対称性を持つにも関わらず平均ゼロ条件を満たすランダムウォークが存在する。ここでは(2)の研究で慣れ親しんだ Laplace 法を援用し、このような微妙な非対称性が推移確率の長時間漸近挙動のどこに現れるのかを調べ、漸近展開の第 2 項からこの非対称性が現れることを示した。また主要項に現れる Riemann 距離が、三角格子がどのような形状の場合に Euclid 距離と同値になるかという疑問にも小谷・砂田の「結晶格子の標準的実現」理論を参考にしながら、満足のいく解答を与えた。これらの研究成果をまとめた論文[1]は国内学術誌に掲載されることが決まった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

[1] S. Ishiwata, H. Kawabi and T. Teruya, "An explicit effect of non-symmetry of random walks on the triangular lattice", To appear in Math. J. Okayama Univ., Vol 57 (2015), 20 pages. (査読有)

[2] S. Albeverio, H. Kawabi and M. Röckner, "Strong uniqueness for both Dirichlet operators and stochastic dynamics to Gibbs measures on a path space with exponential interactions", J. Funct. Anal. Vol 262 (2012), pp. 602-638. (査読有)

[学会発表](計 15 件)

[1] 河備 浩司, "ある無限次元空間上の微分作用素の一意性問題とその周辺", RIMS 研究集会「確率解析」, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 3 月 18 日.

[2] Hiroshi Kawabi, "Stationary phase for rough differential equations", Rough Paths:

Theory and Applications, Institute for Pure and Applied Mathematics (IPAM), University of California at Los Angeles (UCLA), 2014 年 1 月 28 日.

[3] 河備 浩司, "Uniqueness of Dirichlet forms related to stochastic quantization under exponential interaction in two-dimensional finite volume", 科研費シンポジウム「マルコフ過程とその周辺」, 東北大学大学院理学研究科, 2013 年 11 月 15 日.

[4] Hiroshi Kawabi, "Uniqueness of Dirichlet forms related to stochastic quantization under exponential interaction in two-dimensional finite volume", German-Japanese Open Meeting on Stochastic Analysis, Universität Leipzig, 2013 年 9 月 9 日.

[5] 河備 浩司, "An effect of non-symmetry on the transition probability of random walks on the triangular lattice", 科研費シンポジウム「マルコフ過程とその周辺」, 京都大学大学院理学研究科, 2013 年 1 月 12 日.

[6] Hiroshi Kawabi, "Strong uniqueness of diffusions to Gibbs measures on a path space with exponential and polynomial interactions", Oberseminar Mathematik, Hausdorff Center for Mathematics, Universität Bonn, 2012 年 12 月 19 日.

[7] Hiroshi Kawabi, "Strong uniqueness of diffusions to Gibbs measures on a path space with exponential and polynomial interactions", Bielefeld Stochastic Afternoon, SFB701, Faculty of Mathematics, Universität Bielefeld, 2012 年 12 月 12 日.

[8] 石渡 聡, 河備 浩司, 照屋 翼, "An effect of fragile non-symmetry on the transition probability of random walks on the triangular lattice", 日本数学会秋期総合分科会, 九州大学, 2012 年 9 月 18 日.

[9] 河備 浩司, "Strong uniqueness of diffusions on a path space with interactions", 東北確率論セミナー, 東北大学大学院理学研究科, 2012 年 6 月 22 日.

[10] 河備 浩司, "三角格子上の非対称ランダムウォークの推移確率の長時間漸近挙動について", 第 31 回小谷 CREST 臨時セミナー, 東北大学大学院理学研究科, 2012 年 5 月 28 日.

[11] 河備 浩司, "三角格子上の非対称ランダムウォークの推移確率の長時間漸近挙動について", 長岡高専数学談話会, 長岡工業高等専門学校, 2012 年 2 月 9 日.

[12] 石渡 聡, 河備 浩司, 照屋 翼, "三角格子上の非対称ランダムウォークの推移確率の長時間

漸近挙動について”，日本数学会中国・四国支部例会，岡山大学環境理工学部，2012年1月22日．

[13] 河備 浩司，“Strong uniqueness of diffusions to Gibbs measures on a path space with exponential interactions”，九州確率論セミナー，九州大学大学院数理学研究院，2012年1月6日．

[14] Hiroshi Kawabi，“Strong uniqueness of diffusions to Gibbs measures on a path space with exponential interactions”，Invited Session: Stochastic Partial Differential Equations, 5th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, Hausdorff Center for Mathematics Universität Bonn, 2011年9月5日．

[15] Hiroshi Kawabi，“Precise asymptotics of functional integrals for infinite dimensional Ito-Lyons map of Brownian rough paths”，Invited Session: Rough Path Analysis, The 35th Conference on Stochastic Processes and their Applications (SPA), Oaxaca, 2011年6月24日．

6．研究組織

(1)研究代表者

河備 浩司 (KAWABI HIROSHI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：80432904

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし