

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 29 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740111

研究課題名(和文)半導体工学・プラズマ物理に現れる双曲・楕円型連立方程式系の数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis on hyperbolic-elliptic systems arising in semiconductor engineering and plasma physics

研究代表者

鈴木 政尋 (Suzuki, Masahiro)

東京工業大学・情報理工学(系)研究科・助教

研究者番号：30587895

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：ディリクレ・ノイマン混合型境界条件を課した長方形領域において Drift-diffusion model を解析した。デバイスに直流電圧を印加した場合、電流が零とは限らない定常解の安定性を示した。直流電圧に対する成果を発展させ、デバイスに交流電圧を印加した場合、DDモデルに時間周期解が一意的に存在して時間的に安定であることを証明した。

多成分プラズマの運動を記述する Euler-Poisson 方程式を半空間上で考察した。一般化されたボーム条件は、定常解の存在性および安定性のための十分条件であることを解明した。

研究成果の概要(英文)：We analyzed the drift-diffusion model for semiconductors over rectangle domains adopting the Dirichlet-Neumann mixed boundary condition. The stability of stationary solutions was proved for the situation that a direct current voltage is applied to semiconductors. Moreover, we showed the unique existence and the stability of the time-periodic solution if an alternating current voltage is applied.

We study the Euler-Poisson equations, which describes the motion of plasma, over a half space. It is shown that the generalized Bohm criterion give a sufficient condition for the existence and the stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equations.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：Hydrodynamic model Drift-diffusion model Euler-Poisson equations 安定性解析 漸近解析

## 1. 研究開始当初の背景

**半導体のモデル** 半導体中の電子流を記述するモデルとして様々なタイプの方程式系が提案されている。その中でも、流体力学モデルに基づくオイラー方程式とポアソン方程式の連立系である Hydrodynamic model (HD モデル) など、双曲・楕円型連立方程式系で与えられるモデルが、物理的にはより信頼されている。他方、放物・楕円型連立方程式系である Drift-diffusion model (DD モデル) なども代表的なモデルとしてよく知られている。半導体デバイスの設計では、デバイスの使用用途により、これらのモデルを使い分けて数値実験が行われているため、これらのモデル方程式の時間大域可解性の証明や、モデル方程式間の関係(階層構造)の解明は数学的に興味深いだけでなく、工学的にも重要な問題となる。

こうした問題を取り扱った数学的な研究成果は数多く報告されているが、その殆どでは半導体デバイスの物理的特質が看過されていた。平成 22 年度までに代表者は、工学の数値実験で使用される境界条件を採用するなど、物理的な側面を十分に考慮して、一次元有界領域上で大域可解性や階層構造を解析してきた。代表的な成果としては、HD モデルの定常解の一意的存在と指数的漸近安定性を示した。ここで、指数的漸近安定性は、デバイスに一定の電圧をかけたとき電子の流れが直ちに定常的になる現象に対応し、モデル方程式の妥当性を示唆している。また、HD モデルに含まれる緩和時間と呼ばれる物理パラメータを零に近づけたとき(緩和極限と呼ばれる)HD モデルの解が DD モデルに収束することを示している。

半導体デバイスの構造をより考慮するならば、多次元有界領域上でモデル方程式の大域解の漸近解析を行うことが重要となる。この問題では、デバイスの形状が多面体であることや、半導体デバイスの特性を反映させた特殊な境界条件が問題を大変困難にしている。1986 年に学術雑誌 J. Math. Anal. Appl. に掲載された H. Gajewski 等の論文で、最も簡単なモデルである DD モデルに対して、電流が零となる定常解の安定性が示されているが、それ以来注目すべき成果は報告されていない。

**プラズマのモデル** プラズマが接触する固定壁付近には境界層(シース)が形成される。プラズマ物理学ではオイラー・ポアソン方程式(EP 方程式)を用いた形式的な議論により、シースが形成されるための条件としてボーム条件が提案されている。この条件は、正イオンが極超音速でプラズマ領域からシース領域に流れ込む必要があることを意味する。

ボーム条件の数学的検証を試みた成果は幾つか報告されている。まず S. Ha 等は EP 方程式の自由境界問題を扱っている。彼等は

自由境界上でボーム条件が成立すると仮定し、時間大域解の存在を議論しているが、その解の漸近挙動は解析していなかった。シースは定常的な境界層と観測され、数学的には時間的に安定な定常解であると理解できる。2001 年に A. Ambroso 等は、ボーム条件を仮定して一次元有界区間上で定常解の存在を示している。また、同氏は時間発展問題の解が時間経過とともに定常解に収束することを数値シミュレーションで確認している。一方、代表者等は半空間において EP 方程式を解析し、ボーム条件は半空間上で EP 方程式に定常解が存在して且つ時間的に安定であるための十分条件を与えることを示している。これにより、数学的にはシースは定常解に対応することが解明された。一方、シースとプラズマが遷移している状態の解析は未解決問題となっている。

ところで、工学的に利用されるプラズマの多くは、電子と複数種類の正イオンが混在する多成分プラズマである。プラズマ物理学では、多成分プラズマに対しても一般化されたボーム条件が導出されている。工学的な側面をより考慮すれば、一般化されたボーム条件の数学的検証が重要となる。

## 2. 研究の目的

**半導体のモデル** 二次元有界領域上で DD、HD モデルの時間大域解の漸近挙動を解析する。一般に半導体デバイスの形状は多角形である。さらに、デバイスは一部分のみが電極に接触し、その他の部分では電流の流入流出は起こらない。数学研究でもこのようなデバイスの特殊な構造を反映した境界条件を採用すべきであろう。工学的な数値実験では、デバイスが電極に接する境界に、ドーピング関数(半導体中の正イオンの分布関数)及び、半導体にかける電圧から決まるディリクレ境界条件が課され、電極に接しない境界に、電子が半導体の外部に流れ出ないことを意味するノイマン境界条件が課される。本研究では、多角形領域上でディリクレ・ノイマン混合型境界条件を採用して、電流が零とは限らない一般的な定常解の安定性を示す。さらに、HD モデルの解の緩和極限が DD モデルの解に収束することを証明する。

**プラズマのモデル** シースとプラズマが遷移している状態を解析する。平成 22 年度までの代表者の研究により、シース領域は定常解に対応することが解明されている。プラズマ領域は EP 方程式の希薄波と呼ばれる特殊な解に対応すると予想している。この予想を示すため、半空間上で EP 方程式の解が時間経過とともに、定常解と希薄波の重ね合わせに収束することを証明する。

電子と単一種類の正イオンからなるプラズマのボーム条件は、数学的に正当化されている。多成分プラズマの一般化されたボーム

条件を数学的に検証する。

### 3. 研究の方法

**半導体のモデル** まず比較的易しい放物・楕円型連立系の DD モデルに対して、ディリクレ・ノイマン混合型境界条件を課した長方形領域上で、電流が零とは限らない一般的な定常解の安定性解析を行った。DD モデルの研究では、H. Gajewski 等が時間局所可解性を示しており、研究目標である大域解の構成や、定常解の安定性解析ではアプリアリ評価の導出が証明の鍵となる。その際、電子密度の正值性を示すことが困難であった。Gajewski 等が使用した方法は、本質的に定常電流が零となる性質を利用しており、この方法は使用できない。代表者は、特殊な積分量を用いたエネルギー法により正值性を示し、難局を打開した。この課題を解決するにあたり、放物型・楕円型方程式の専門家である菅徹助教（東京工業大学）に協力を要請した。

次に、HD モデルを長方形領域上で解析した。向い合う辺の一組にディリクレ条件、もう一組にノイマン条件を課した混合型境界条件を採用して、定常解の安定性を考察した。時間局所可解性を示すにあたり、ノイマン境界条件を課した二辺に対して偶関数拡張や奇関数拡張を用いて、帯状領域上での初期値境界値問題に帰着させた。ガレルキン法を利用して、この帰着された問題の可解性を示すことを試みた。その際、双曲型方程式の初期値境界値問題の専門家である高山正宏助教（慶應義塾大学）と討論を行った。

**プラズマのモデル** シースとプラズマが遷移している状態を解析する足がかりとして、EP 方程式の時間大域解の漸近状態が希薄波のみで与えられる場合を考察した。まず、漸近状態となるだろう希薄波を構成し、計算機を用いて、この予想が正しいことを数値的に確認した。これを数学的に示すには、EP 方程式は消散構造を持たないため、EP 方程式の分散構造を利用する必要があると予想される。学術雑誌 Comm. Math. Phys. に掲載予定である Y. Guo 等の論文では、EP 方程式はクライン・ゴールドン方程式に近い分散構造を持つことが発見されている。彼等が導出した、解の  $L^1$ -ノルムの減衰評価を援用して、EP 方程式の時間大域解の漸近状態が希薄波となることを示そうと試みた。希薄波の研究は、西畑伸也教授（東京工業大学）および大縄将史准教授（東京海洋大学）と共同で研究を進めた。

多成分プラズマでは、正イオンは自身が持つ正電荷により電場に変化を与え、その電場を経由して他種類の正イオンの運動に影響を及ぼす。よって、多種類の正イオン間には複雑な相互作用が働くことになる。この相互作用はフーリエ空間では代数方程式を用いて表せる。奇関数拡張を用いて半空間から全

空間に問題を帰着させ、さらにフーリエ空間上のエネルギー法を援用し、正イオン間の相互作用に対する適切な評価の導出した。

### 4. 研究成果

**半導体のモデル** ディリクレ・ノイマン混合型境界条件を課した長方形領域において DD モデルを解析した。デバイスに直流電圧を印加した場合、電流が零とは限らない定常解の安定性を示した。より具体的には、電子密度および正孔密度の初期値が  $L^2$  空間に属せば、そのノルムの大きさに制限を課すことなく、DD モデルの初期値境界値問題に時間大域解が一意的に存在することを示し、さらに印加電圧が小さければ、その大域解は時間経過とともに定常解に指数関数的な速さで収束することを証明した。これは、デバイスに一定の電圧をかけたとき電子の流れが直ちに定常的になる現象に対応し、モデル方程式の妥当性を示唆する。

直流電圧に対する成果を発展させ、デバイスに交流電圧を印加した場合、DD モデルに時間周期解が存在することを示した。一意性については、印加電圧が小さい場合に成立する。さらに、時間周期解の指数関数的漸近安定性を証明した。これらの結果をまとめた論文は現在投稿中または執筆中である。

HD モデルについては、長方形領域における初期値境界値問題を、境界が滑らかとなる帯状領域における初期値境界値問題に帰着することに成功したが、帰着された問題の時間局所可解性を示すには至らなかった。

**プラズマのモデル** シースとプラズマが遷移している状態を考察し、EP 方程式の解の漸近状態になると予想される、定常解と希薄波の重ね合わせを具体的に構成した。さらに、数値計算を用いて、この予想が正しいことは確認できた。その後、数学的な正当化を試みたが、決定的な成果は得られなかった。

半空間において、多成分プラズマの EP 方程式に定常解が存在して且つ時間的に安定であるための十分条件は、一般化されたボーム条件であることを解明した。より具体的には、定常解からの初期擾乱が指数関数の重み付きソボレフ空間に属し、そのノルムが小さければ、EP 方程式の時間大域解は時間経過とともに定常解に指数関数的な速さで収束する。代数関数についても同様な結果を得た。これらの成果は国際研究会などで口頭発表し、それらをまとめた論文は現在投稿中である。

### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計6件)

1. Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa and Masahiro Suzuki, *The mathematical justification of the Bohm criterion in plasma physics*, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **64** (2015), 489--495 ; Proceedings for the 4th MSJ-SI conference on Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations. (査読有り)
2. Masahiro Suzuki, Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma, *京都大学数理解析研究所講究録* **1905** (2014), 180-187. (査読無し)
3. 鈴木政尋, Bohm のシース条件の数学解析, *京都大学数理解析研究所講究録* **1885** (2014), 116-122. (査読無し)
4. Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa and Masahiro Suzuki, *Nonlinear stability of boundary layer solutions to the Euler-Poisson equations in plasma physics*, *AIMS Series on Applied Mathematics* **8** (2014), 817--822 ; Proceedings of the 2012 International Conference on Hyperbolic Problems. (査読有り)
5. Bongsuk Kwon, Masahiro Suzuki and Masahiro Takayama, *Large-time behavior of solutions to an outflow problem for a shallow water model*, *J. Differential Equations* **255** (2013), 1883-1904. (査読有り)
6. Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa and Masahiro Suzuki, *Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equation arising in plasma physics*, *SIAM Math. Anal* **44** (2012), 761-790. (査読有り)

[学会発表](計 23 件)

1. Masahiro Suzuki, *Mathematical analysis of the generalized Bohm criterion, Recent development of conservation laws and mathematical fluid dynamics*, National Institute for Mathematical Science, Daejeon (Korea), March 25<sup>th</sup>-27<sup>th</sup> 2015.
2. Masahiro Suzuki, *Stability of boundary layer solutions of the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma*, International

Conference on Nonlinear Analysis: Boundary Phenomena for Evolutionary PDE, Academia Sinica, Taipei (Taiwan), December 22<sup>nd</sup> -24<sup>th</sup> 2014.

3. 鈴木政尋, 多成分プラズマの運動を記述するオイラー・ポアソン方程式の定常解, 第3回岐阜数理科学研究会, 飛騨高山まちの博物館 (岐阜県), 平成 26 年 9 月 7-9 日.
4. 鈴木政尋, 多成分プラズマの数学解析について, 現象解析特別セミナー第 6 回, 東京理科大学 (東京都), 平成 26 年 9 月 5-6 日.
5. Masahiro Suzuki, *Large time behavior of solutions to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma*, *Ito Workshop on Partial Differential Equations*, Kyushu University (Fukuoka), August 22<sup>nd</sup> 2014.
6. Masahiro Suzuki, *Boundary layers to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma*, The 15th International Conference on Hyperbolic Problem, Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (Brazil), July 28<sup>th</sup> -August 1<sup>st</sup> 2014.
7. Masahiro Suzuki, *Stationary solutions to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma*, The Summer Workshop on Kinetic Theory and Gas Dynamics, Stanford University, California (USA), July 21<sup>st</sup>-25<sup>th</sup> 2014.
8. Masahiro Suzuki, *Boundary layers to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma*, *The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, The Universidad Autonoma de Madrid, Madrid (Spain), July 7<sup>th</sup>-11<sup>th</sup> 2014.
9. Masahiro Suzuki, *Boundary layers to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma*, *Workshop on Nonlinear PDEs*, Ulsan National Institute of Science and Technology, Ulsan (Korea), May 30<sup>th</sup>-31<sup>st</sup> 2014.
10. 鈴木政尋, 気体放電のモデルについて, 現象解析特別セミナー第 5 回, 茨城大学 (茨城県), 平成 26 年 3 月 22-23 日.

11. 鈴木政尋, 多成分プラズマの運動を記述するモデル方程式の定常解について, 日本数学会, 学習院大学 (東京都), 平成 26 年 3 月 15-18 日.
12. Masahiro Suzuki, *Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma*, Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid, RIMS Kyoto University (Kyoto), November 25<sup>th</sup>-27<sup>th</sup> 2013.
13. 鈴木政尋, 多成分プラズマの運動を記述する Euler-Poisson 方程式の定常解について, 実解析的手法と偏微分方程式ワークショップ, 東北大学 (宮城県), 平成 25 年 11 月 9 日.
14. 鈴木政尋, Bohm のシース条件の数学解析, RIMS 共同研究「長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解を目指して」, 京都大学数理解析研究所 (京都府), 平成 25 年 6 月 19-21 日.
15. Masahiro Suzuki, *Asymptotic behavior of solutions to a shallow water model*, International Conference on the Mathematical Fluid Dynamics, Hotel Nikko Nara (Nara), March 5<sup>th</sup>-9<sup>th</sup> 2013.
16. 鈴木政尋, 浅水波方程式の解の長時間挙動, 現象解析特別セミナー第 2 回, 茨城大学 (茨城県), 平成 24 年 9 月 29-30 日.
17. 鈴木政尋, 高山正宏, Bongsuk Kwon, 浅水波方程式の解の漸近挙動について, 日本数学会, 九州大学 (福岡県), 平成 24 年 9 月 19-22 日.
18. Masahiro Suzuki, *Asymptotic analysis for the Euler-Poisson equations arising in plasma physics*, Parabolic and Navier-Stokes equations 2012, Stefan Banach Center, Bedlewo (Poland), September 3<sup>rd</sup>-7<sup>th</sup> 2012.
19. Masahiro Suzuki, *Asymptotic structure of solutions to the Euler-Poisson Equations arising in plasma physics*, 2011 SIAM Conference on Analysis of PDE, San Diego Marriott Mission Valley, California (USA), November 11<sup>th</sup> 2011.
20. Masahiro Suzuki, *Asymptotic behavior*

*of solutions to the Euler-Poisson Equations arising in plasma physics*, Third China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Central China Normal University, Xian (China), October 25<sup>th</sup> 2011.

21. 大縄将史, 西畑伸也, 鈴木政尋, Bohm のシース条件の数学的検証, 流体力学会年会, 首都大学東京 (東京都), 平成 23 年 9 月 7 日.
22. 鈴木政尋, Bongsuk Kwon, 浅水流方程式の安定性解析, 流体力学会年会, 首都大学東京 (東京都), 平成 23 年 9 月 7 日.
23. Masahiro Suzuki, *Boundary layers to the Euler-Poisson equations arising in plasma physics*, One Forum, Two Cities: Aspect of Nonlinear PDEs, National Taiwan University, Taipei (Taiwan), August 29<sup>th</sup> 2011.

[ 図書 ] (計 1 件)

1. Shinya Nishibata and Masahiro Suzuki, *Hierarchy of semiconductor equations: relaxation limits with initial layers for large initial data*, Mathematical Society of Japan Memoirs **26**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2011. 109 pp. (査読有り)

[ その他 ]

鈴木政尋のページ:

<http://www.is.titech.ac.jp/~msuzuki4/>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 政尋 (SUZUKI MASAHIRO)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・助教

研究者番号 : 30587895