様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 6 月 19 日現在

機関番号：３５３０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４０１１５
研究課題名（和文）２次元非自励系の不安定性理論の構築とその応用

研究課題名（英文）Construction of the instability theory of two-dimensional nonautonomous systems and its application

研究代表者
鬼塚　政一（ONITSUKA, Masakazu）

岡山理科大学・理学部・講師

研究者番号：２０５４８３６７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,900,000円、（間接経費）　870,000円

研究成果の概要（和文）：微分方程式で記述される既知の数理モデルは、係数を定数や周期関数に限る場合が多い。本研究では、これら以外の場合に対応し得る時変係数をもつ微分方程式（非自励系）を対象とした。特に、減衰振動子を含む線形非自励系、半分線形非自励系の零解の一様漸近安定性及びその不安定性の十分条件を与えた。得られた一様漸近安定性に関する成果（定理）は良い性質をもったリヤプノフ関数を与えることや摂動問題、ロバスト安定問題への応用が強く期待できる。

研究成果の概要（英文）：The known mathematical models are described by differential equations with periodic or constant coefficients in many cases. In this study, we targeted differential systems with time-varying coefficients (we call non-autonomous differential systems), which may correspond to other cases. In particular, I gave some sufficient conditions of uniform asymptotic stability and its instability for the linear systems and half-linear systems including a damped oscillator. The obtained results for uniform asymptotic stability can be expected strongly to be applied to giving a Lyapunov function with good properties. Therefore, the present study can contribute significantly to the perturbation problem and the robust stability problem.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式　非自励系　不安定性　安定性　リヤプノフの直接法　相平面解析

１．研究開始当初の背景

線形常微分方程式系（以下、線形系と呼ぶ）に対しては、応用面の要請から古くより膨大な研究がなされてきた。その最たる恩恵として、線形系の解空間がベクトル空間を成す事実が挙げられる。解の定数倍が解になり、解同士の和も解になる性質をもつことから、初期値を適当に与えれば、基本解行列が構成可能となる。さらに、もしも一つの基本解が具体的な関数として求まれば、それを用いてすべての解を表現可能なことも知られている。すなわち、ある基本解行列の情報のみで、すべての解の情報が明らかになると言える。線形系における種々のリヤプノフの安定性もまたこの恩恵により、基本解行列を用いた評価式による必要十分条件が明らかとなった。特に自励系（すべての係数が定数）もしくは周期系（すべての係数が周期関数）に限れば、フロッケ理論が適用でき、線形系の零解の安定性が判別可能となる。ところが、一般に線形系でさえも自励系や周期系は稀な方程式であり、具体的な関数として基本解が求まることは殆どない。すなわち、多くの場合で安定性を判定できないと言える。そこで、この問題点を解決すべく、現在に至るまで国内外の研究者が努力を重ねてきたが、リヤプノフの安定性の分類において最も強い性質をもつ指数漸近安定性ですら十分に解明されたとは言い難い。零解が指数漸近安定であるとは、零解近傍におけるすべての解が指数的オーダーで零解に漸近するときを言う。この解の性質は制御系の摂動問題において強い力を発揮することが知られており、非摂動系の零解が指数漸近安定であるならば、ある意味で微小な摂動を加えた摂動系の零解もまた指数漸近安定となる。指数漸近安定性は制御工学におけるロバスト安定性との関連が深い。

さて、基本解を求めることなく安定性を判定するためには、変数係数で記述される関係式による条件が妥当となる。実際、1960 年代頃から Levinson, Nohel, Smith, Hatvani, Totik をはじめとする多くの研究者等が線形振動子や非線形振動子と呼ばれる２階の微分方程式の平衡点の漸近安定性の解明に臨んできた。それらの多くはリヤプノフの直接法と呼ばれるリヤプノフ関数（零解とそれ以外の解との距離を測る関数）を用いた解析方法により、解の挙動の解析がなされている。本研究の先行研究もまたこの手法に準じており、特に半分線形と呼ばれる振動子の平衡点の漸近安定性及び定数係数（自励系）の半分線形振動子解の挙動を考察することにより、非自励系の解の性質の解明に取り組んできた。半分線形微分方程式とは、解の定数倍もまた解になる性質をもつが解の和も解になるとは限らない線形の半分の性質をもつ微分方程式のことを言う。半分線形微分方程式は１次元ｐラプラシアン作用素を含むことから、流体力学や連続体力学で応用されており、1960 年代後半から解の振動性を中心に研究されているが、これまで半分線形微分方程式に対する安定性の問題意識は低かった。

そこで、先行結果では、半分線形微分方程式を同値なシステム（半分線形系）に変換し、２次元平面上のベクトル場から解の漸近的挙動を調べる相平面解析を用いて、２次元“自励”半分線形系の零解の安定性を幾何学的に分類した。saddle, center, node, focus の分類である(J. Sugie, M. Onitsuka and A. Yamaguchi, Studia Sci. Math. Hungar., 2007)。特別なパラメータの場合には半分線形系は線形系の分類と一致することに注意する。また、近年では、リヤプノフの直接法を用いた解析方法で、２次元非自励半分線形系に対する漸近安定性の十分条件を考察した(J. Sugie, S. Hata and M. Onitsuka, J. Math. Anal. Appl., 2010; J. Sugie and M. Onitsuka, Arch. Math. (Brno), 2008; J. Sugie and M. Onitsuka, Acta Sci. Math. (Szeged), 2007)。加えて、非自励線形系に関する指数漸近安定性を考察してきた(J. Sugie and M. Onitsuka, Proc. Amer. Math. Soc., 2010; M. Onitsuka, Nonlinear Anal., 2010)。

２．研究の目的

学術論文[J. Sugie and M. Onitsuka, Arch. Math. (Brno), 2008; J. Sugie and M. Onitsuka, Acta Sci. Math. (Szeged), 2007]において、漸近安定であるが指数漸近安定でない非自励線形系の例をいくつか挙げたが、それらの係数には共通の特徴があることに気付いた。ここで挙げた例はいずれも基本解が求まる方程式であったが、この係数の特徴を手がかりに、逆に、基本解が求められない場合であっても、指数漸近安定でないための十分条件が得られるのではないか？と着想した。非自励系の不安定性理論に関する文献調査を進めるにつれ、線形系ですら関連文献は少なく、参考となる先行研究も殆どないことが分かった。そこで、当該研究では、新たな解析手法を確立して不安定性理論を構築できないかと発起した。
研究期間内に目標としたテーマは次の通りである。

(I) ２次元非自励線形系の不安定性の判定条件

学術論文[M. Onitsuka, Nonlinear Anal., 2010]では、変数係数をもつ２階スカラー線形常微分方程式に対して、リヤプノフの直接法を用いて、２つある変数係数のうち１つが零に近づけば、零解は指数漸近安定でないことを数学的に証明した。但し、特別な線形変換を利用しているため、その証明法を一般的な非自励線形系や非自励半分線形系には拡張できないという難点があった。本テーマでは、リヤプノフの直接法と相平面解析を組み合わせた特別な線形変換を使用しない新たな解析方法を確立する。その後、この解析方

法を駆使して、不安定性理論をより汎用性のある２次元非自励線形系へ発展させる。

(II)　２次元非自励半分線形系及び非自励非線形系の不安定性の判定条件

テーマ(I) で得られた不安定性理論を２次元非自励半分線形系及び、より一般の非自励系に対する不安定性理論へ拡張する。

(III)　制御工学への応用

例えば、飛行機の迎え角といわれる気流の向きと翼のなす角度の振動現象における不安定性など、様々な不安定現象をさらに調査・研究し、得られた研究成果との繋がりを明確にする。

３．研究の方法

諸科学で様々な不安定現象が確認され、その数学的裏付けが求められているにもかかわらず、非自励系の不安定性の判定条件は確立されていない。線形理論を用いず不安定性の判定条件を数学的に証明する点は、先行研究[M. Onitsuka, Nonlinear Anal., 2010]と一線を画するものであり、本研究の特色の１つである。これを成し遂げるため、非自励系には殆ど適用されることのなかった相平面解析とリヤプノフの直接法を融合し、数値解析を併用して証明のアイディアを抽出する手法を用いて研究を行った。

研究が滞った際には、次に示す対策を講じた。

（１）問題を単純化して研究遂行：例えば、複数ある変数係数のうち何れかを定数に固定して、本質的にどの係数の情報が不安定性に影響を与えるのかを見極めた。

（２）リヤプノフの直接法と相平面解析の長所・短所の明確化：これまでの成果により、両解析手法に関する長所と短所はある程度明確化がなされてきたが、場合によっては、リヤプノフの直接法のみで証明を進めるか、もしくは相平面解析のみでアプローチする手段をとった。

（３）研究動向をよく知る研究者への相談：研究集会等に積極的に参加し、本研究分野の近隣のテーマで研究されている研究者（研究相談者：島根大・杉江実郎教授、愛媛大・内藤学教授、大阪府立大・松永秀章准教授、山岡直人准教授、一関高専・片方江講師）と研究交流をすることで、当該研究に関連するアイディアや情報を得た。

４．研究成果

諸科学に登場するさまざまな現象は時間に依存して刻一刻と変化する。通常、微分方程式で記述される既知の数理モデルは、係数を定数や周期関数に限る場合が多い。ところが、実際の自然現象においては、温度変化、気圧変化、劣化現象などの時間変化を伴うことが想定される。したがって、定数や周期関数に限らない時変係数をもつ微分方程式系（以下、非自励系と呼ぶ）を考察することは諸科学の発展に寄与し得ると考える。本研究では特に線形及び非線形非自励系における零解の安定性及び不安定性の解明に取り組んだ。以下に本研究で得られた成果を報告する。

研究開始当初の平成２３年度においては摩擦項（減衰項ともいう）をもつ時変線形振動子の平衡点が一様漸近安定であるための十分条件を与えた（雑誌論文 [3]）。線形系に限れば一様漸近安定性は指数漸近安定性と同値であるから、本結果は指数漸近安定であるための十分条件と読み換えることができることに注意する。本成果は先行研究である A.O. Ignatyev (Electron J. Differ. Eqs., 1997) が与えた十分条件に着目し、彼が課したバネ係数の時刻微分に関する制約を外すことに成功した。すなわち、Ignatyev が課した条件を使用することなく一様漸近安定性の証明を与えた。その際、用いた手法は、リヤプノフの直接法である。また、非一様漸近安定性（不安定性）についても議論し、本研究で課している条件は必要不可欠であることを明示した。さらに、当該年度においては、半分線形非自励系の零解の一様漸近安定性についても議論を行い、雑誌論文 [3]を含むより広い非線形系における一様漸近安定であるための十分条件を与えた（雑誌論文 [2]）。本成果は線形振動子に限った場合でも新しい結果であり、摩擦項が負の値を取る場合であっても判定可能な十分条件となっている。また、半分線形系における一様漸近安定性に関する議論は他に類を見ない成果となった。

平成２４年度においては、上記の成果をより、精密にするため、線形非自励系における一様漸近安定性について議論を行った（雑誌論文 [4]）。ここで注目すべきは、２次元線形系の反対角成分において符号変化を許す場合を考察した点である。これまで多くの先行研究においては、反対角成分の時変係数に符号変化を禁止する研究が殆どであったが、時間の変化に伴い反対角成分が符号変化したとしても一様漸近安定であるための十分条件を与えることに成功した。

平成２５年度においては、非自励半分線形振動子の摩擦係数に着目し、例え摩擦係数が非有界であったとしても平衡点が一様漸近安定であるための十分条件を与えた。摩擦係数のみを時変係数として扱っている。本研究で得られた成果は、L. Hatvani (Nonlinear Anal, 1995) が与えた２次元線形系の漸近安定性に関する十分条件及び L. Hatvani, T. Krisztin, V. Totik(J. Differential Equations, 1995) が与えた線形振動子の平衡点が漸近安定性であるための必要十分条件を吟味することによって得られた。ただし、先行研究は何れも漸近安定性に関する成果であるため、本研究で扱う一様漸近安定性とは全く別の証明手法が必要であった。当該研究ではリヤプノフの直接法を主軸とし、相平面解析を補助的に使用することで、必要十分

条件とまでは言い切れないが、Hatvani 等が与えた必要十分条件とよく類似した摩擦係数を二重積分に含む十分条件を与えることに成功した。必要性は現段階で未解決問題であるが、本十分条件を満足しない場合に一様漸近安定でない例も得られており、信憑性は高いと推測できる。必要性を示すことは今後の課題と位置づける。

以上をまとめると、本研究では、諸科学に登場する振動子を含む非自励系を一貫して対象としてきた。制御工学において、システムの一様漸近安定性は良い性質をもったリヤプノフ関数を与える（リヤプノフの逆定理）ことや摂動問題、ロバスト安定問題への応用が強く期待できる。また、上記内容を含む学会発表を国内外において計１７件行い、成果を報告した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

[1]J. Sugie and M. Onitsuka, Growth conditions for uniform asymptotic stability of damped oscillators, Nonlinear Analysis, 2014, 98, 83-103. 査読有

[2] M. Onitsuka and J. Sugie, Uniform global asymptotic stability for half-linear differential systems with time-varying coefficients, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Sect A, 2011, 141 (5),1083-1101.査読有

[3] M. Onitsuka, Uniform asymptotic stability for damped linear oscillators with variable parameters, Applied Mathematics and Computation, 2011, 218 (4), 1436-1442. 査読有

[4] 鬼塚 政一, Uniform asymptotic stability for two-dimensional linear systems whose anti-diagonals are allowed to change sign, 数理解析研究所講究録「関数方程式の定性的理論の新展開」, 2012, vol. 1786, pp. 128-141.査読無

〔学会発表〕（計１７件）

[1] 杉江 実郎，鬼塚 政一，減衰線形振動子の一様漸近安定性に対する離散的条件，日本数学会 2014 年度年会，学習院大学西 2 号館 201 教室，2014 年 3 月 15 日.

[2] 鬼塚 政一，非自励半分線形系の吸収性と安定性 (Attractivity and stability for nonautonomous half-linear differential systems)，RIMS 研究集会「常微分方程式の定性的理論の新展開」，京都大学 数理解析研究所 1 階 111 号室，2013 年 11 月 19 日.（招待講演）

[3] 鬼塚 政一，２次元非自励半分線形系の吸収性と安定性，日本数学会 2013 年度秋季総合分科会，愛媛大学城北キャンパス共通教育講義棟講義室 11，2013 年 9 月 24 日.

[4] 鬼塚 政一，変数係数をもつ 2 次元半分線形系の吸収性と同程度吸収性，「岡山理科大学における微分方程式セミナー（通算第３６回）」，岡山理科大学 2 学舎 2 階 10221 講義室，2013 年 9 月 9 日.

[5] M. Onitsuka, Attractivity implies stability for half-linear differential systems with time-varying coefficients, Equadiff13, Hall B, Faculty of Arts, Charles University in Prague, Czech Republic，2013 年 8 月 27 日.

[6] 鬼塚 政一，２次元半分線形系における同程度吸収性は安定性を保証するか？，「関数方程式の定性的理論ワークショップ」，岡山理科大学 25 号館 5 階 22553 講義室，2013 年 3 月 18 日.

[7] 鬼塚 政一，２階半分線形微分方程式の吸収性と安定性について，「振動理論ワークショップ - 松山 2013」，愛媛大学理学部数学棟 2 階大演習室，2013 年 2 月 10 日.

[8] 鬼塚 政一，２階半分線形微分方程式の同程度吸収性と安定性における包含関係，日本数学会中国・四国支部例会，高知大学理学部 共通講義室４，2013 年 1 月 27 日.

[9] M. Onitsuka, Uniform asymptotic stability for two-dimensional linear systems with variable parameters, International Conference on the Theory, Methods and Applications of Nonlinear Equations, Rhode Hall 342, Texas A&M University-Kingsville, Texas, USA, 2012 年 12 月 19 日.

[10] 鬼塚 政一，２次元非自励線形系の一様漸近安定性について，微分方程式の総合的研究，京都大学理学研究科 301 号室，2012 年 12 月 15 日.（招待講演）

[11] M. Onitsuka, On the uniform asymptotic stability for two-dimensional linear nonautonomous differential systems, International Workshop Handayama Differential Equation Seminar, seminar room (north), 8th floor, 20th building, Okayama University of Science, Japan, 2012 年 11 月 6 日.

[12] 鬼塚 政一，有界時変関数を減衰係数として持つ線形減衰振動子の漸近安定性，愛知教育大学における微分方程式セミナー，愛知教育大学第一共通棟 201 教室，2012 年 9 月 7 日.

[13] 鬼塚 政一，2 階線形微分方程式の摩擦係数が漸近安定性と一様漸近安定性に与える影響，なかもず解析セミナー，大阪府立大学中百舌鳥キャンパス B3 棟 204 号室，2012 年 7 月 6 日.

[14] 鬼塚 政一，係数を定符号に限らない 2 次元線形系の一様漸近安定性，微分方程式の定性的理論ワークショップ，島根大学総合理工学部 3 号館 6 階数理第 2 総合演習室，2012 年 3 月 4 日.

[15] M. Onitsuka, Uniform asymptotic stability for two-dimensional linear systems whose anti-diagonals are allowed to change sign, Progress in Qualitative Theory of Functional Equations, Room 111, Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University, Japan, 2011年11月11日.(招待講演)
[16] 鬼塚 政一, 係数行列の対角成分に符号変化を許す2次元線形系の一様漸近安定性, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 信州大学松本キャンパス全学教育機構第 20 講義室, 2011年9月28日.
[17] 鬼塚 政一, 2 次元非自励線形系の零解が指数漸近安定でないための十分条件, 岐阜大学における微分方程式セミナー, 岐阜大学柳戸キャンパス岐阜大学工学部101番教室, 2011年9月9日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
○出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
http://www.xmath.ous.ac.jp/~onitsuka/

6. 研究組織
(1)研究代表者
鬼塚 政一(ONITSUKA, Masakazu)
岡山理科大学・理学部・講師
研究者番号:20548367

(2)研究分担者
( )

研究者番号:

(3)連携研究者
( )

研究者番号: