

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740121

研究課題名(和文) 統計力学的手法によるエノン写像の大域分岐問題の研究

研究課題名(英文) Thermodynamic formalism for the Henon map at the first bifurcation

## 研究代表者

高橋 博樹 (Takahasi, Hiroki)

慶應義塾大学・理工学部・講師

研究者番号：00467440

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：Henon写像の最初の分岐パラメーターにおける力学系の大域的な構造を、熱力学形式とよばれる統計力学とのアナロジーを用いて解析し、平衡状態とよばれる不変確率測度の存在と一意性を証明した。そして、平衡状態を用いて不変集合のハウスドルフ次元を不変確率測度のエントロピー、リャプノフ指数と結びつける公式(Bowen-Manningの公式)を導いた。さらに、平衡状態については相関が指数的に減衰することや中心極限定理を満たすことなど、統計的に良い性質を持つことを証明した。

研究成果の概要(英文)：We investigated the dynamics of the Henon map at the first bifurcation parameter with the use of thermodynamic formalism, and proved the existence and uniqueness of equilibrium measures. We also derived a version of Bowen-Manning formula which connects the Hausdorff dimension of the invariant set with the entropy and Lyapunov exponent of invariant measures. We also proved nice statistical properties of equilibrium measures, such as an exponential decay of correlations and the central limit theorem.

研究分野：大域解析学・力学系

キーワード：力学系

## 1. 研究開始当初の背景

力学系のパラメーターを連続に変化させてゆくときに起きる位相的な構造の不連続で大域的な変化、すなわち大域分岐を研究している。特にホモクリニック接触などの特徴的な構造不安定性を有する力学系の分岐と、その双曲性の関係に興味がある。この方向の研究においては、Henon 写像と呼ばれる 2 次元平面上の多項式微分同相写像のパラメーター族が重要な役割を果たす。Henon 写像は、Smale の馬蹄形写像と呼ばれる構造安定でカオス的な力学系からストレンジアトラクターへの遷移を表すモデルと見なすこともでき、現代の可微分力学系理論の研究において中心的な位置を占めている。

一般の力学系の homoclinic 接触による分岐を統一的に理解することを目的として、まず「Henon 写像が構造安定性を失う最初の分岐パラメーターの近傍において最もよく見られる「ダイナミクスを調べよ」という問題が Palis, Takens らにより 90 年代に提起された。私は論文 7. でこの問題に取り組み、Henon 写像の Jacobian の絶対値が非常に小さく、従って 1 次元写像の摂動と見なせる場合には、あらゆるカオス的な振舞いが測度論的な意味ではほとんど消滅してしまっていることを証明した。この結果は、1 次元力学系におけるカオスの測度論的な豊かさを主張する Jakobson の定理とは対照的であり、1 次元力学系と本質的に異なる現象を発見した点で意義が深い。また、Henon 写像の分岐パラメーターの「向こう側」における力学系の構造を理解する上での基本的な結果と位置づけられる。論文 7. の結果をさらに精密化し、力学系がどの程度の双曲性を有するか、という問題を考えるうえで、本研究の着想に至った。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、Henon 写像の最初の分岐パラメーターにおけるダイナミクスを統計力学・エルゴード理論的手法により解析し、より一般のカオス力学系の分岐を解明するための重要な手がかりを得ることにある。

## 3. 研究の方法

力学系が一様双曲性と呼ばれる最も厳格な双曲性を持つ場合には有限 Markov 分割が存在するため、力学系を記号で表現することができる。記号化された力学系は 1 次元格子の熱振動を表すモデルと見なすことができるので、統計力学的な手法や考え方で元の力学系を詳しく調べることができ、平衡状態と呼ばれる力学系の性質をよく反映する不変確率測度の存在と一意性、さらにはそれらを通じて不変集合の Hausdorff 次元、周期点の分

布など、多くの情報が得られる。本研究では統計力学とのアナロジーを一様双曲性を持たないような力学系についても押し進め、特に Henon 写像の最初の分岐パラメーターにおける平衡状態、つまり自由エネルギーを最小化する不変確率測度を構成する。さらに、これらの平衡状態を通じて力学系の性質を解析する。

Henon 写像の分岐パラメーターではサドル型不動点の安定多様体と不安定多様体の接触が存在するため、力学系は一様双曲性を持たない。さらに、力学系の不変集合の幾何構造を反映するポテンシャル関数が不連続になる。この二つの本質的な困難を同時に克服するため、不変多様体による相空間の可算無限分割を構成して力学系を可算無限個の記号で表現し、これを手がかりに平衡状態の候補を構成する。この候補が実際に自由エネルギーを最小化するかどうかを確認するためには、記号で表現できない不変確率測度の自由エネルギーが大きいことを別の議論で示す必要がある。

## 4. 研究成果

Henon 写像の最初の分岐パラメーターにおいて、不安定方向への伸び率に関係する幾何ポテンシャルの 1 パラメーター族に対する平衡状態の存在と一意性を証明した。上述したように、平衡状態の候補が実際に平衡状態であることを示すために、温度の逆数に対応するパラメーターの範囲には制約がある。この制約を取り払い、全てのパラメーターにおいて平衡状態の存在と一意性を示すことが将来の課題として残された。

また、圧力関数の零点が不変集合と不安定多様体の交わりの Hausdorff 次元に一致することを、この平衡状態を用いて証明した。さらに、角谷の摩天楼とその帰還時間に関する Young の結果を適用することで、平衡状態が統計的に良い性質を持つこと（相関の指数的減衰、中心極限定理）を証明した。これらの結果から、分岐パラメーターにおける力学系はきわめて一様双曲性に近い性質を持つことがわかった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

1. Samuel Senti and Hiroki Takahasi, Equilibrium measures for the Henon map at the first bifurcation: uniqueness and geometric/statistical properties, Ergodic Theory and dynamical Systems, published online

2. Yong Moo Chung and Hiroki Takahasi, Multifractal formalism for the Henon map at the first bifurcation, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 34 (2014), 1116-1141

3. Samuel Senti and Hiroki Takahasi, Equilibrium measures for the Henon map at the first bifurcation, Nonlinearity, 26 (2013), 1719--1741

4. Yong Moo Chung and Hiroki Takahasi, Large deviation principle for Benedicks-Carleson quadratic maps, Communications in Mathematical Physics, 315 (2012), 803-826

5. Hiroki Takahasi, Statistical properties of non-uniformly expanding 1d maps with logarithmic singularities, Nonlinearity, 25 (2012), 551-567

6. Hiroki Takahasi and Qiudong Wang, Nonuniformly expanding 1d maps with logarithmic singularities, Nonlinearity, 25 (2012), 533-550

7. Hiroki Takahasi, Prevalent dynamics at the first bifurcation of Henon-like families, Communications in Mathematical Physics, 312 (2011), 37-85

〔学会発表〕(計 11 件)

1. Hiroki Takahasi, Lyapunov spectrum for Henon-like maps at the first bifurcation. ICM Satellite Conference "Dynamical Systems and Related Topics" Daejeon 市(韓国)2014年8月8日

2. Hiroki Takahasi, Lyapunov exponents of ergodic measures at the first bifurcation of the Henon family. 京都力学系セミナー. 京都大学(京都府・京都市)2014年4月11日

3. Hiroki Takahasi, カオス的な一次元力学系の大偏差原理. 確率論シンポジウム. 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)2013年12月17日

4. Hiroki Takahasi, Multifractal analysis for the Henon map at the first bifurcation. Measurable and Topological Dynamics, Keio 2013. 慶應義塾大学(神奈川県・横浜市)2013年12月14日

5. Hiroki Takahasi, Prevalence of non-uniform hyperbolicity at the first bifurcation of Henon-like families. Pacific Rim conference on Mathematics. 札幌コンベンションセンター(北海道・札幌市)2013年7月2日

6. Hiroki Takahasi, カオス的な2次写像力学系の大偏差原理. 確率論シンポジウム. 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)2012年12月19日

7. Hiroki Takahasi, 最初の分岐でのエノン写像の平衡状態. Dynamical Systems and Related Topics. 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)2012年7月12日

8. Hiroki Takahasi, Large deviation principle for Benedicks-Carleson quadratic maps. Workshop on non-uniformly hyperbolic and neutral one-dimensional dynamics. シンガポール市(シンガポール)2012年4月27日

9. Hiroki Takahasi, Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps. Dynamics of complex systems. 北海道大学(北海道・札幌市)2012年3月8日

10. Hiroki Takahasi, Thermodynamic formalism for the Henon maps: Hausdorff dimensions and phase transitions. Frontiers in Dynamical Systems and Topology. 京都大学(京都府・京都市)2011年11月24日

11. Hiroki Takahasi, Full large deviation principle for Benedicks-Carleson quadratic maps on the interval. Workshop on dynamical systems. サルバドル市(ブラジル)2011年10月18日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.keio.ac.jp/~hiroki/>

6. 研究組織

(1)研究代表者 高橋 博樹  
(TAKAHASI, Hiroki)

研究者番号 : 00467440

慶應義塾大学・理工学部・講師

(2)研究分担者  
( )

研究者番号 :

(3)連携研究者  
( )

研究者番号 :