様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：１２６０５
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４０１２５

研究課題名（和文）微分方程式の超離散解析

研究課題名（英文）Ultradicrete analysis of differential equations

研究代表者
村田　実貴生（Murata, Mikio）

東京農工大学・工学（系）研究科（研究院）・講師

研究者番号：６０４４７３６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：超離散化は与えられた差分方程式をセル・オートマトンに変換する極限操作である。この手法で構成されたセル・オートマトンは可積分系の方程式においては厳密解の構造など元の方程式の本質的な性質を保存する。
研究機関内に、可積分系の方程式でない反応拡散系の方程式を離散化して差分方程式を構成し、さらに超離散化によってセル・オートマトンを構成した。得られたセル・オートマトンについて、解の形状、挙動、安定性など元の連続系の解の性質を保つことを示した。

研究成果の概要（英文）：Ultradiscretization is a limiting procedure transforming a given difference equation into a cellular automaton. The cellular automaton constructed by this procedure preserves the essential properties of the original equation, such as the structure of exact solutions for integrable equations.
During the research period, cellular automaton analogs of reaction-diffusion systems which are not an integrable system are constructed by the ultradiscretization. The shape, behavior and stability of the solutions in ultradiscrete systems are similar to those in continuous systems.

研究分野：可積分系

キーワード：解析学　関数方程式

## １．研究開始当初の背景

現在のデータから未来のデータを予測する数学的なモデルとして、時間や空間を連続量として扱う微分方程式を用いるモデルと時間や空間を離散量として扱うセル・オートマトンを用いるモデルがある。両者は共に未来予測の目的があるため、共通の性質も多いと考えられるが、その直接的な対応関係はほとんど分かっていない現状がある。唯一、対応がよく分かっているのは可積分系と称される方程式群であり、各種ソリトン方程式とソリトンセル・オートマトンに対応がある。それらは共通の差分方程式から異なる極限操作を行うことにより導出される。またパンルヴェ方程式もソリトン方程式と同様の取り扱いができ、対応するセル・オートマトンを構成することができる。差分方程式から微分方程式を得る極限操作は連続化と呼ばれ、セル・オートマトンを得る操作は超離散化と呼ばれる。超離散化の操作で得られる方程式は超離散方程式とも呼ばれる。超離散方程式は、演算として加法、減法と大小の比較のみを有するという特徴がある。

## ２．研究の目的

微分方程式に対して、その方程式と同様の性質を持つと期待される超離散方程式を構成する手法を確立し、新しい超離散方程式を構成する。現時点でほとんど未整備である超離散方程式の解析の理論を構築し、構成した様々な超離散方程式の性質を調べる。更に、超離散方程式の解析結果と微分方程式の知見を比較し、共通点と相違点を明らかにする。微分方程式、超離散方程式、その間に位置する差分方程式という３種類の関数方程式に直接の対応関係を与え、それらを総合的に解析する手法を確立する。

## ３．研究の方法

(1) パンルヴェ方程式の q 差分類似である q パンルヴェ方程式に対して、超離散化の手法を適用することにより、超離散パンルヴェ方程式を導出する。そして、その超離散パンルヴェ方程式の積分定数を含む厳密解を求める。その解の特徴を調べることで、パンルヴェ超越関数の性質を明らかにする。

(2)反応拡散方程式に対して、その方程式と同様の性質を持つと期待される新しい超離散方程式を構成する手法を確立し、新しい超離散方程式を構成する。その超離散方程式の解を調べる。更に、超離散方程式の解析により得られた解と対応する微分方程式の解と比較検討を行う。

## ４．研究成果

(1) パンルヴェ方程式は 20 世紀の初頭にパンルヴェによって発見された。その後しばらくのブランクを経たのち、数理物理への応用も契機となって現在再び活発な研究が進行している。パンルヴェ方程式は微分方程式であるが、同じような性質をもつ漸化式も知られており、離散パンルヴェ方程式と呼ばれる。微分方程式が関数が解になる方程式であるのに対して漸化式は数列が解になる方程式である。関数は実数や複素数の変数に対して値が定まるのに対し、数列は自然数や整数の変数に対して値が定まるという違いがある。関数も数列も値は実数や複素数であるが、数列の中には値も整数であるものが存在する。そのような数列を解に持つ漸化式の例に超離散方程式がある。パンルヴェ方程式はⅠ型からⅥ型まで 6 種類ある。そのうちⅡ型と同じような性質をもつ漸化式のひとつが $A_6^{(1)}$型 q パンルヴェ方程式である。
$A_6^{(1)}$型 q パンルヴェ方程式と同じような性質をもつ超離散方程式を構成した。また、その超離散方程式の 2 つのパラメータを持つ解を構成した。パンルヴェ方程式や離散パンルヴェ方程式は解となる関数や数列に 2 つの任意定数が入るが、解が既知の関数や数列の組み合わせで表すことができないことが知られているため、それを表示することはできない。しかし、超離散方程式では解が既知の数列の組み合わせで表すことができ、2 つのパラメータを持つ解を表示することができた。

(2) 反応拡散方程式とは元来、各種化学物質の濃度が化学反応と拡散によって変化する様子を記述する数理モデルを意味したが、今日では二つ以上の変数に対して値が定まる関数を解にもつ微分方程式である偏微分方程式のうち、反応を表す項と拡散を表す項が方程式に含まれる特定の形をした偏微分方程式の連立系を総じて反応拡散方程式と呼び、化学反応モデルに限らず生物学や物理学など幅広い分野で扱われている。反応拡散方程式の解はしばしば複雑な時空間パターンを呈することが知られており、非線形現象の代表的な数理モデルの一つとして盛んに研究されている。
微分方程式と同じような性質をもつ超離散方程式を構成する一般的な方法は過去に存在しなかったのであるが、それを実現する方法を提案した。その方法は、特に反応拡散方程式に適用することができる。
単独の反応拡散方程式のうち、空間的に一様な安定解を一つだけ持つフィッシャー・KPP 方程式と空間的に一様な安定解を二つ持つアレン・カーン方程式にその方法を適用し、超離散方程式を構成した。反応拡散方程式の重要な解として、形状を変えずに平行移動する解である進行波解や、過去の時間も含むすべての時間で存在する解である大域解が報告されている。構成した超離散方程式に対して進行波解や大域解を構成した。対応する両者の解を比較して、基本的な性質が共通することが確認された。

(3) 2 変数の反応拡散方程式のうち、自己複

製パターンなどを生じる化学反応系を記述するグレイ・スコットモデルに対して、微分方程式から超離散類似を構成する系統的な方法を適用して、離散類似および超離散類似を構成した。グレイ・スコットモデルは式のパラメータと初期条件の変更により、解が様々な時空パターンを生成するが、構成した離散系と超離散系の解も進行パルスや自己複製パターンを生成することを示した。得られた超離散系は、エレメンタリー・セル・オートマトンのルール 90 に等価な系を含むことが分かった。このセル・オートマトンは自己相似図形であるシェルピンスキーの 3 角形のパターンを生成することで知られる。構成した空間 2 次元の超離散モデルが元の連続系と同様のリングパターンや自己複製パターンを生成することを示した。

(4) 空間１次元のアレン・カーン方程式には一定の速度の進行波解が存在するのに対し、空間 2 次元のアレン・カーン方程式には任意の速度の V 字型の形状を持つ進行波解が存在する。空間 2 次元のアレン・カーン方程式に対して、微分方程式から超離散類似を構成する系統的な方法を適用して、超離散類似を構成した。得られた超離散系にも任意の速度の V 字型の形状を持つ進行波解が存在することを示した。また、超離散方程式に対して安定性の定義を行い、得られた V 字型の進行波解が安定性を持つことを示した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① 松家　敬介、<u>村田　実貴生</u>、Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model、Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B、査読有、Vol.20、No.1、2015、pp. 173-187、DOI:10.3934/dcdsb.2015.20.173

②<u>村田　実貴生</u>、超離散反応拡散方程式の多次元進行波、九州大学応用力学研究所研究集会報告、査読有、Vol.25AO-S2、2014、pp. 47-52 http://hdl.handle.net/2324/1448853

③<u>村田　実貴生</u>、Discretization and ultradiscretization of non-integrable systems、RIMS Kôkyûroku Bessatsu、査読有、Vol.B41、2013、pp. 85-99、http://ci.nii.ac.jp/naid/110009631923

④<u>村田　実貴生</u>、Tropical discretization: ultradiscrete Fisher-KPP equation and ultradiscrete Allen-Cahn equation、Journal of Difference Equations and Applications、査読有、Vol.19、No.6、2013、pp. 1008-1021、DOI: 10.1080/10236198.2012.705834

⑤<u>村田　実貴生</u>、超離散 Allen-Cahn 方程式、京都大学数理解析研究所講究録、査読無、Vol.1796、2012、pp. 119-127、http://hdl.handle.net/2433/172900

⑥<u>村田　実貴生</u>、超離散反応拡散系、九州大学応用力学研究所研究集会報告、査読有、Vol.23AO-S7、2012、pp. 7-12、http://hdl.handle.net/2324/23448

⑦ <u>村田　実貴生</u>、Exact Solutions with Two Parameters for an Ultradiscrete Painlevé Equation of Type $A_6^{(1)}$、Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications、査読有、Vol.7、2011、pp. 059、DOI: 10.3842/SIGMA.2011.059

〔学会発表〕（計１１件）

①<u>村田　実貴生</u>、超離散反応拡散方程式における多次元進行波、研究集会「非線形波動研究の拡がり」、平成 25 年 11 月 1 日、九州大学（福岡県春日市）
②<u>村田　実貴生</u>、反応拡散系の超離散化、数電機特別連携セミナー、平成 25 年 9 月 21 日、首都大学東京（東京都八王子市）
③<u>村田　実貴生</u>、放物型偏微分方程式のセル・オートマトン化法、日本数学会年会応用数学分科会、平成 25 年 3 月 22 日、京都大学（京都府京都市）
④<u>村田　実貴生</u>、非可積分系の離散化と超離散化、研究集会「非線形離散可積分系の拡がり」、平成 24 年 8 月 21 日、京都大学（京都府京都市）
⑤<u>村田　実貴生</u>、超離散 Allen-Cahn 方程式、RDS セミナー、平成 23 年 12 月 5 日、明治大学（神奈川県川崎市）
⑥<u>村田　実貴生</u>、超離散 Allen-Cahn 方程式、研究集会　第 8 回「生物数学の理論とその応用」、平成 23 年 11 月 18 日、京都大学（京都府京都市）
⑦<u>村田　実貴生</u>、超離散 Allen-Cahn 方程式、広島数理解析セミナー、平成 23 年 11 月 11 日、広島大学（広島県東広島市）
⑧<u>村田　実貴生</u>、超離散反応拡散系、研究集会「非線形波動研究の進展－現象と数理の相互作用－」、平成 23 年 10 月 27 日、九州大学（福岡県春日市）
⑨<u>村田　実貴生</u>、超離散 Allen-Cahn 方程式、現象数理セミナー/九州可積分系セミナー、平成 23 年 10 月 6 日、九州大学（福岡県福岡市）
⑩<u>村田　実貴生</u>、超離散 Allen-Cahn 方程式、日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会、平成 23 年 9 月 28 日、信州大学（長野県松本市）
⑪<u>村田　実貴生</u>、Ultradiscrete Allen-Cahn equationInfinite Analysis 11 -Frontier of Integrability-、平成 23 年 7 月 27 日、東京大学（東京都目黒区）

## ６．研究組織

(1)研究代表者

村田　実貴生（MURATA, Mikio）
東京農工大学・大学院工学研究院・講師
研究者番号：　６０４４７３６５

(4)研究協力者

松家　敬介（MATSUYA, Keisuke）