様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 １９ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４０１２６

研究課題名（和文）可積分セルオートマトンの数理構造の研究

研究課題名（英文）Studies on integrable cellular automata

研究代表者
間田　潤（MADA, Jun）

日本大学・生産工学部・助教

研究者番号：８０３９６８５３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円、（間接経費）　　870,000円

研究成果の概要（和文）：主に（1）有限体上の離散可積分方程式と（2）エレメンタリーセルオートマトンの分類について研究を行った.
(1) [i] パラメータを不定元として利用することによって，（一般化された）離散KdV方程式の時間発展とNソリトン解を有限体上で得た. [ii] 特異点閉じ込めテストと代数的に同様なalmost good reduction を定義することにより，離散パンルヴェII方程式などの時間発展と解を有限体上で得た.
(2) 特異値間隔分布を用いて，エレメンタリーセルオートマトンの分類を行った. ウルフラムの分類によるクラス３とクラス４は形的には似ているが，これらを分類する指標を提案した.

研究成果の概要（英文）：I investigated (1) discrete integrable equations over finite fields and (2) a classification of an elementary cellular automaton.
(1) (i) Replacing a parameter with a value in finite fields, one can uniquely determine the values of the dependent variables in finite fields and infinity. Thanks to this property, I obtained the time evolution and N soliton solutions of the (generalized) discrete KdV equations over finite fields. (ii) I defined the notion of almost good reduction (AGR), which is an arithmetic analogue of passing the singularity confinement test, and proved that the discrete Painleve II equation (dPII) has AGR. By AGR, I obtained the time evolution and a solution of the dPII over finite fields. I had the similar results for qPII, qPIII, qPIV and dKdV.
(2) I suggested a classification of an elementary cellular automaton by singular value decomposition. Though class 4 resembles class 3 of Wolfram's classification, one can distinguish them by using the above method.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系　セルオートマトン　有限体　相関関数

１．研究開始当初の背景

(1) 周期箱玉系の相関関数の構造　：

可解格子模型の研究の目標は，相関関数の決定にあると言っても過言ではない．したがって，その極限系である周期箱玉系においても相関関数を求めることは重要な課題である．研究開始当初の段階では，組合せ論的手法を用いて，１点相関関数と近距離の２点相関関数の具体的な表式を，より一般のＮ点相関関数に対しては，超離散テータ関数の有限和による表式を得ていたので，より一般的で容易に取り扱える相関関数の表式の導出を目指した．

また，可解格子模型の相関関数は，qKZ 方程式やパンルヴェ方程式と深い関係にあることが良く知られているので，周期箱玉系の相関関数が満たす方程式の導出についても関心があった．

(2) 可積分セルオートマトンの「量子化」：

量子アルゴリズムへの応用を考えたとき，可積分セルオートマトンの量子化（状態の重ねあわせを許す時間発展を持つセルオートマトン系）が必要であることに気がつく．

可解格子模型から単純に極限をとるとセルオートマトンにしかなりえない．だが，周期箱玉系は，量子可積分系である可解格子模型の極限系であると同時に，離散 KP 方程式の超離散化でもあるので，非可換化により可解格子模型を何らかの意味で自然に含む一般的な可積分系が構築できる可能性があると考え，「非自律離散 KP 方程式系の非可換化による量子箱玉系の導出」を目標とした．

２．研究の目的

(1) 「周期箱玉系の相関関数」を組合せ論的手法によって考察するときに系の保存量に着目するのだが，その扱いは行列と相性が良さそうであったので，行列を用いた解析を行うことにした．その準備のため，構造が簡単であるエレメンタリーセルオートマトンを，まず対象として考察することにし，相互相関行列の解析を行ったところ，特異値間隔分布にある特徴が現れることに気がついた．具体的には，ウルフラムによる視覚的な分類に対応して，特異値間隔分布がウィグナー分布やポアソン分布になることが分かった．そこで，ウルフラムよりも，より具体的な指標によってエレメンタリーセルオートマトンを分類できないか考えることにした．

(2) セルオートマトンが１セルにおいて有限種類の状態しかとらないことから，(1) で述べたように行列を用いてセルオートマトンを考察する際には，mod によって得られた結果を対象のセルオートマトン上の値に制限することになる(例えば,周期箱玉系は mod 2 によって値を制限する)．周期箱玉系は超離散化と呼ばれるある種の極限操作を用い離散方程式の従属変数を離散化することにより得られるが，超離散化を行う前の離散方程式を mod つまり有限体上で考えることにすれば，超離散化とは異なるセルオートマトンが得られる．そこで，有限体上の離散方程式についての研究を行い，新たなセルオートマトンの導出を試みた．

３．研究の方法

(1) 離散 KdV 方程式および拡張離散 KdV 方程式を具体例に，パラメータを不定元として残して，いったん代数関数体上の系と見なし時間発展させた後，パラメータに具体的な値を代入することによって有限体上の時間発展を定義する手法を提案した．この手法を用いて Ｎソリトン解を得ることもできた．

(2) 前述 (1) の手法では，意図的にパラメータを残すことによって有限体上での考察を行ったが，パラメータを残さない形として，p 進数体上で写像を定義し，p 進数体から有限体への還元を行うことにより，離散パンルヴェⅡ方程式などを有限体上で定義した．このとき，good reduction の拡張である almost

good reductionを導入することによって，定義が上手くいくよう工夫を行った．

(3) ウルフラムが行ったエレメンタリーセルオートマトンの分類は，視覚的による部分が大きく，クラス３とクラス４のような形的に似ているものの分類については明確でない部分が残る．そこで，相互相関行列の特異値間隔分布がクラスによって，ウィグナー分布やポアソン分布になることを用いて，新たな分類手法を提案した．

４．研究成果

(1) 離散KdV方程式

$$\begin{cases} x_n^{t+1} = \dfrac{(1+\delta)\, y_n^t}{1+\delta\, x_n^t\, y_n^t} \\ y_n^{t+1} = \dfrac{x_n^t\,(1+\delta\, x_n^t\, y_n^t)}{1+\delta} \end{cases}$$

においてはパラメータδを不定元として$\mathrm{F}_q(\delta)$上の系とし，拡張離散KdV方程式

$$\begin{cases} x_n^{t+1} = y_n^t\, \dfrac{(1-\beta)+\beta\, x_n^t\, y_n^t}{(1-\alpha)+\alpha\, x_n^t\, y_n^t} \\ y_n^{t+1} = x_n^t\, \dfrac{(1-\alpha)+\alpha\, x_n^t\, y_n^t}{(1-\beta)+\beta\, x_n^t\, y_n^t} \end{cases}$$

においてはパラメータα, βを不定元として$\mathrm{F}_q(\alpha, \beta)$上の系とし計算を行い，その後に$\delta$および$\alpha, \beta$に具体的な値を代入することによって，有限体上での時間発展を定義した．さらに，ソリトン解にも同様の手法を用いることによって，有限体上でのソリトン解が得られ，例外を除けば周期$q-1$を持つことも示せた．

多くの研究者が有限体上での系の取り扱いを考察してきているが，これまでの先行研究では何かしらの制約の下に結果が成り立っていた．今回は，より一般的に系を有限体上で考察するための手法を提案することができ，この分野において大きな発展の可能性を与えたと考える．

(2) 図１のように還元πと写像ϕが可換であるという性質 good reduction を拡張し，図２のように有限ステップの合成により，還元と写像が可換になるという性質を‘almost good reduction (AGR)’と呼ぶことにする．

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \xrightarrow{\ \phi\ } & \phi(x, y) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ (\tilde{x}, \tilde{y}) & \xrightarrow[\ \overline{\phi}\ ]{} & \overline{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \pi(\phi(x, y)) \end{array}$$

図１．good reduction

$$\begin{array}{lcl} (x_n, y_n) \xrightarrow{\phi_n} (x_{n+1}, y_{n+1}) \xrightarrow{\phi_{n+1}} \cdots \xrightarrow{\phi_{n+m-1}} & & (x_{n+m}, y_{n+m}) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \xrightarrow[\overline{\Phi}_n^m]{\qquad\qquad\qquad} & & \overline{\Phi}_n^m(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (\tilde{x}_{n+m}, \tilde{y}_{n+m}) \end{array}$$

ただし，$\overline{\Phi}_n^m = \overline{\phi_{n+m-1} \circ \cdots \circ \phi_{n+1} \circ \phi_n}$

図２．almost good reduction

離散パンルヴェⅡ方程式($\mathrm{dP_{II}}$)の他，qPII，qPIII，qPIVや先行研究で用いたdKdVも十分に広い領域でAGRを持つことが分かり，有限体上での時間発展を定義することができた．このAGRは特異点閉じ込め方の数論的な類似物あることが分かっており，有限体上の力学系に対する可積分性の判定基準になり得るのではないかと期待している．

また，解についてもAGRの手法を用いて考察することによって，ソリトン解からソリトンと似た形の進行波を有限体上で得ることができた．

ここで用いた手法は，前述 (1) のパラメータを意図的に残す手法よりも自然な手法である．そのため，より厳密な議論を行うことができ，特異点閉じ込めテストとの関連性などの議論も進めることができている．今後，この手法を用いることにより，離散可積分方程式の有限体上での研究は進展していくと期待する．

(3) 相互相関行列の特異値間隔分布を見る

と，ウィグナー分布とポアソン分布，さらにその間のような分布図が見られた．これらをウルフラムの分類に対応させてみると，次のような対応が見られた．

1. クラス２では，極端に周期が短いものやルール 73 を除いて，ポアソン分布になる．
2. クラス３では，ルール 18，146 でシステムサイズが偶数の場合を除いて，ウィグナー分布になる．
3. クラス４では，ウィグナー分布に近い分布図だが，クラス３（ルール 18，146 も含む）とは明らかに異なる分布図になる．

未だ定量的な分類には至っていないが，セルオートマトンを分類する指標として有効な結果が得られたと考える．
ここでの考察を，一般のセルオートマトンで行うことにより，どのような結果が得られるかは，今後の課題であると考える．
また，ここで得られた手法や結果を周期箱玉系の研究に役立てていきたい．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Masataka Kanki, Jun Mada, Tetsuji Tokihiro, “Singularities of the discrete KdV equation and the Laurent property”, J. Phys. A: Math. Theor. 47, 065201 (2014) 査読有
DOI: 10.1088/1751-8113/47/6/065201

② Masataka Kanki, Jun Mada, Tetsuji Tokihiro, “The space of initial conditions and the property of an almost good reduction in discrete Painleve II equations over finite fields”, JNMP 20, Supplement 1, 101-109, (2013) 査読有
DOI: 10.1080/14029251.2013.862437

③ Masataka Kanki, Jun Mada and Tetsuji Tokihiro, “Discrete Integrable Equations over Finite Fields”, SIGMA 8, 054, (2012) 査読有
DOI: 10.3842/SIGMA.2012.054

④ Masataka Kanki, Jun Mada, K M Tamizhmani and Tetsuji Tokihiro, “Discrete Painleve II equation over finite fields”, J. Phys. A: Math. Theor. 45, 342001, (2012) 査読有
DOI: 10.1088/1751-8113/45/34/342001

⑤ Masataka Kanki, Jun Mada and Tetsuji Tokihiro, “Soliton Solutions of a Generalized Discrete KdV Equation”, Phys. Soc. Jpn. 81, 084002, (2012) 査読有
DOI: 10.1143/JPSJ.81.084002

〔学会発表〕（計７件）

① 神吉 雅崇，時弘 哲治，間瀬 崇史，間田 潤，“離散可積分系の特異点閉じ込めと互いに素条件について，” 日本応用数理学会，京都大学，2014 年 3 月 20 日

② 神吉 雅崇，時弘 哲治，間田 潤，“p 進数体を用いた有限体上の可積分系の構成，” 日本数学会，愛媛大学，2013 年 9 月 24 日

③ 神吉 雅崇，間田 潤，時弘 哲治，“ソリトン系の特異点閉じ込めと法 p 還元について，” 日本応用数理学会，アクロス福岡，2013 年 9 月 9 日

④ 神吉 雅崇，時弘 哲治，間田 潤，“p 進数体上の離散 KdV 方程式，” 日本応用数理学会，東洋大学，2013 年 3 月 14 日

⑤ 金子勇治，時弘哲治，間田潤，“可逆エレメンタリーセルオートマトンの相互相関行列の解析，” 日本物理学会，横浜国立大学，2012 年 9 月 21 日

⑥ 神吉 雅崇, 時弘 哲治, 間田 潤, “有限体上の可積分方程式系について,” 日本数学会, 東京理科大学, 2012 年 3 月 28 日

⑦ 神吉 雅崇, 時弘 哲治, 間田 潤, “有限体上の離散可積分系とそのソリトン解,” 日本応用数理学会, 九州大学, 2012 年 3 月 9 日

６．研究組織

(1)研究代表者

間田　潤（MADA, Jun）

日本大学・生産工学部・助教

研究者番号：８０３９６８５３