

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 14 日現在

機関番号：52601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2011～2012

課題番号：23740136

研究課題名（和文） 部分双曲系の双曲構造とエルゴード的極限定理の関係

研究課題名（英文） Relation between hyperbolic structure of partially hyperbolic systems and ergodic limit theorems

研究代表者

波止元 仁 (HATOMOTO JIN)

東京工業高等専門学校・一般教育科・准教授

研究者番号：70547801

研究成果の概要（和文）：

弱双曲積構造をもつ離散時間の力学系に対して、弱双曲積構造がもつ回帰分岐の中心不安定方向のルベーク測度に対する減少率が多項式的なときに、Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) 測度に対する多項式的な上限評価をもつ大偏差原理 (LDP) を求めた。この結果の適用例は、一様縮小方向と中心不安定方向にマヌビレ・ポモ写像型の挙動をするオールモースト・アノソフ系である。

研究成果の概要（英文）：We dealt with discrete time dynamical systems with weak hyperbolic product structure. We established polynomial upper bounds on large deviations for such dynamical systems associated with its Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) measure if the return tail of the weak hyperbolic product structure decays polynomially. Applications of our results are some almost Anosov diffeomorphisms with uniformly contracting direction of which restriction on one dimensional center unstable direction behaves as a Manneville-Pomeau map.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	200,000	60,000	260,000

研究分野：力学系理論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：部分双曲系，弱双曲積構造，SRB 測度，時間相関関数の多項式的減衰

1. 研究開始当初の背景

時間と共に変化する状態を記述する数学的なモデルを力学系という。常微分方程式の解曲線は連続時間の力学系を，差分方程式の解は離散時間の力学系を与える。報告者は多様体上の離散時間の力学系を扱い，系の軌道上の観測関数に対して写像の時間発展に伴う時間相関関数の減衰率や中心極限定理，大偏差原理といった統計的性質を，力学系の

「双曲積構造」に注目して調べてきた。

現在まで多くの著者の研究成果から，散逸的な力学系に対して，不安定多様体上の条件付き測度の絶対連続性を用いて特徴付けられる Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) 測度は，上述の統計的性質を含む様々な漸近挙動を記述する上で最も都合の良い確率測度であると考えられている。一様双曲的力学系の枠組みでは，Sinai, Ruelle, Bowen 達により

SRB 測度に対して上述の統計的性質が明らかにされている。一方で非一様双曲的力学系の枠組みでは、一部のビリヤードやエノン写像等に対しては SRB 測度に対して上述の統計的性質が解明されているものの、報告者が扱ってきた一様縮小方向をもつ $C^{1+\alpha}$ 級オールモースト・アノソフ微分同相写像（以下単にオールモースト・アノソフ系という）を含む一般的な非一様双曲系の統計的性質の定式化の完成には至っていない。

双曲性とは写像が一様に拡大・縮小作用する方向をもつことであるが、部分双曲性は写像が相対的に拡大・縮小作用する方向をもつことで特徴付けられる。部分双曲的力学系は一様双曲的力学系の摂動して構成することができるため、部分双曲的力学系に対する一様双曲的力学系の成果の拡張に興味もたれてきた。最近、興味もたれてきていることの一つに最初に挙げた統計的性質がある。Alves-Bonatti-Viana 達により一部の部分双曲的微分同相写像は SRB 測度をもち、時間相関関数の指数的減衰や中心極限定理(CLT)が知られているが、未解決な部分が多い。

部分双曲系を含む非一様双曲的力学系の統計的性質を解明する有効な手段の一つに、Young が導入したヤン・タワーと呼ばれるいくつかのクラスの力学系に対して体系的に適用可能で抽象的なスキームがある。ヤン・タワーにおける重要な概念は、従来の有限マルコフ分割の一般化として理解され得る双曲積構造である。双曲積構造は力学系を、ヤン・タワーを導くインデューシングへと自然に関連付ける。インデューシングとは、初めの力学系を他の一つの力学系、その力学的な性質の理解がより簡潔で、その力学系から初めの力学系の情報を十分に取り出すことができるような力学系で置き換えることである。Young はヤン・タワーの上で相関関数の指数的減衰率と CLT を明らかにしたが、その後、Melbourne-Nicol 等の成果からヤン・タワーの上では大偏差原理(LDP)やその他の極限定理も成立することが示されており、双曲積構造は力学系の様々な統計的性質を調べる上で相性が良い概念であると考えられつつある。

報告者は安定方向と中心不安定方向をもつ部分双曲的微分同相写像(以下、これを単に部分双曲系という)に着目して、相関関数の減衰率や CLT といった統計積性質を、オールモースト・アノソフ系を主に扱うことで調べてきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、部分双曲的微分同相写像に対する SRB 測度の相関関数の減衰率、CLT

と LDP を求めることである。そのために部分双曲系に対して、報告者が導入したある種の双曲積構造（弱双曲積構造）と相関関数の減衰率・CLT・LDP の関連付けを行う。

現在までの報告者の成果から、弱双曲積構造と相関関数の多項式的減衰率・CLT の関連付けが行われているので、弱双曲積構造をもつ力学系に対して、次を調べることを目標とした。

- (1) オールモースト・アノソフ系の弱双曲積構造の上の条件を定式化して、一般的に弱双曲積構造と多項式的上限評価の LDP, さらには LDP を含む概念である Moderate deviation principle (MDP) との関連付けを行う。

部分双曲系の統計的性質に関連することにより、Alves-Luzzatto-Pinheiro の成果が挙げられる。彼らは縮小方向をもたない非可逆な或る非一様双曲的力学系に対して、双曲時間と呼ばれる概念を用いることにより安定方向を持たない型の双曲積構造をもつことを示した。ここで双曲時間とは、プリスの補題により特徴付けられる力学系の或る前方反復回数のことである。

中心不安定方向の上では面積や体積を拡大する部分双曲系は、安定方向から導かれる安定多様体に沿って移すポアンカレ写像を用いることで、中心不安定方向の上で拡大写像が定義できる。この拡大写像は Alves-Luzzatto-Pinheiro が扱った力学系の様々な性質を反映すると予測できた。そこで部分双曲系に対して以下を調べることを目標とした。

- (2) 弱双曲積構造を定義する無限個の回帰分岐の存在と回帰分岐の上での安定方向に沿って移すポアンカレ写像の絶対連続性と都合の良い距離に対するリプシッツ連続性。
- (3) 弱双曲積構造の回帰分岐を中心不安定方向のルベグ測度に制限したときの、回帰時間が大きくなるにつれた回帰分岐の減少率。

3. 研究の方法

報告者は、弱双曲積構造をもつ力学系の SRB 測度の時間相関関数の多項式的な減衰率を中心に現在まで研究を進めてきた。弱双曲積構造をもつ力学系が CLT を満たすことは、SRB 測度の時間相関関数の良いオーダーの多項式的減衰から従う。本研究においても、弱双曲積構造をもつ力学系に対して、

S R B 測度の時間相関関数の多項式的減衰を中心にして, L D P の多項式的な上限評価を調べた. 次に, この結果を部分双曲系に適用するため, 部分双曲系に対する弱双曲積構造を調べた.

部分双曲系はオールモースト・アノソフ系を含む力学系である. オールモースト・アノソフ系は双曲積構造を持たないため, 部分双曲系も双曲積構造を持たないと予測された. 一方でオールモースト・アノソフ系は弱双曲積構造をもつため, 部分双曲系も弱双曲積構造をもつと予測できた.

オールモースト・アノソフ系は, 1次元の非可逆力学系であるマヌビレ・ポモ写像の可逆力学系版である. マヌビレ・ポモ写像はその漸近挙動が多項式的なものとして特徴づけられる. 例として, マヌビレ・ポモ写像の唯一の絶対連続不変確率測度に対する時間相関関数は多項式的に減少し, L D P は多項式的な上限評価をもつこと等が挙げられる. これらを踏まえて, オールモースト・アノソフ系に対して以下を調べた.

(i) オールモースト・アノソフ系をもつ弱双曲積構造と多項式的な上限評価をもつ L D P.

(ii) L D P を含む概念である M D P の多項式的な上限評価

(iii) 上記の結果を一般的な弱双曲積構造をもつ力学系に対する結果として拡張するために, オールモースト・アノソフ系の弱双曲積構造で見られた条件の定式化.

(iv) 部分双曲系に対する弱双曲積構造の存在.

(i), (ii) については, 与えられた関数を安定多様体上で定数となるような関数で表すこととオールモースト・アノソフ系の S R B 測度に対する時間相関関数の多項式的な減少率が本質的であった.

(iii) については, (i), (ii) での成果をさらに定式化したうえで, Melbourne-Nicol が双曲積構造をもつ力学系に対して行った証明法と同様の手法を用いた. 即ち, 弱双曲積構造における局所安定多様体上の点を同一視することにより定義される商力学系の相関関数の多項式的な上限評価を用いた. これを実行するために, 弱双曲積構造を定義する局所安定多様体上に以下の付加的な条件を設定した.

- ・ヘルダー連続関数とコホモロガスとなり局所安定多様体上では定数となる関数

の存在条件.

上の条件は, オールモースト・アノソフ系の弱双曲積構造に対して満たされる. また, Young の双曲積構造をもつ力学系に対しても満たされるため, 非現実的な条件ではない.

(iv) については, 現在も進行中のテーマである. 遂行するために困難な点は, 弱双曲積構造の回帰分岐を中心不安定方向に制限した時の減衰速度を調べることにある. これは安定多様体からなる葉層構造と密接に関連しており, また別の問題を引き起こしている.

4. 研究成果

2. 研究目的 (1) に対しては, オールモースト・アノソフ系に対して満たされる 3. 研究の方法で述べた条件の定式化を行い, この条件を, 弱双曲積構造をもつ力学系に対して付与することで, 弱双曲積構造と L D P, M D P の多項式的な上限評価の関連づけに成功した. この結果をオールモースト・アノソフ系に対して適用して, オールモースト・アノソフ系に対する S R B 測度の L D P の多項式的な上限評価を求めた (Hatamoto, 2012).

Melbourne-Nicol は双曲積構造をもつ力学系に対して L D P と M D P を求めているが, 本研究での成果は, この結果の弱双曲積構造を持つ力学系に対応するものである. 双曲積構造をもつ力学系の漸近挙動は概していうと指数的なものとして特徴づけられるが, 本研究で扱ってきたオールモースト・アノソフ系の漸近挙動は多項式的なものとして特徴づけられる. 漸近挙動が多項式的である力学系に対するアプローチは, 今後のオールモースト・アノソフ系に対する様々な漸近挙動を解析する上で有効な手段であると期待できる.

2. 研究目的 (2), (3) に対しては, まだ研究途上であり発表できる段階には至っていない. 一方で本研究を遂行する上で, 弱双曲積構造上で相関関数の減衰率が到達・回帰時間分布に関連することが分かった. これは, 本研究の目的にはなかったものであるが, 成果の一つであると思う. この方面では今後も研究を続けていきたい.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. Jin Hatamoto, Polynomial upper bounds on large and moderate deviations for diffeomorphisms with weak hyperbolic

product structure, Far East J Math Sci. 69(1) (2012), 1-25. 査読有

2. 波止元 仁, 弱双曲積構造をもつ微分同相写像に対する大偏差原理の上限評価, 東京工業高等専門学校研究報告書, 第43号 (2012), 51-57. 査読無

6. 研究組織

(1) 研究代表者

波止元 仁 (Hatamoto Jin)

東京工業高等専門学校・一般教育科・准教授
研究者番号: 70547801

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

無し