様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：５３８０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４０１３７
研究課題名（和文）空間非斉次性をもつ双安定反応拡散方程式系の局在パターンのダイナミクスに関する研究

研究課題名（英文）On a study on dynamics of localized pattern for a bistable reaction diffusion equations with a heterogeneous environment

研究代表者
松澤　寛（Hiroshi, Matsuzawa）

沼津工業高等専門学校・教養科・准教授

研究者番号：８０４１３７８０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,300,000円、（間接経費）　390,000円

研究成果の概要（和文）：反応拡散方程式におけるパターン伝播現象の研究は、近年外来生物種の侵入のモデルを自由境界問題の研究に端を発し、現在、盛んに研究されている。そのことを受け、本研究では、単安定、双安定、燃焼型のいずれか型の非線形項をもつ単独の反応拡散方程式のStefan問題について研究を行った。自由境界が無限遠に発散する場合、その進行速度に詳しい評価と解の漸近的形状について(1)１次元、(2)多次元球対称、(3)１次元で移流項を含む場合について結果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：In this research, we study free boundary problems for nonlinear diffusions equations. Such problems may be used to describe the spreading of a biological or chemical species, with the free boundaries representing the expanding fronts. If the nonlinearity is monostable, bistable, or combustion type, Professor Du and Professor Lou obtained a rather complete description of the long-time dynamical behavior of the problem and revealed sharp transition phenomena between so called "spreading" and "vanishing". They also determined the asymptotic spreading speed of the fronts by using of "semi-waves" when spreading happens. In this research we we give a much sharper estimate for the spreading speed of the fronts than that in the work of Du and Lou, and we describe how the solution approaches the semi-wave when spreading happens. I obtained these results for (1)1 dimensional problem, (2)higher dimensional problem with radially symmetric setting and (3)1 dimensional advection-diffusion problem.

研究分野：非線形偏微分方程式

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：反応拡散方程式　自由境界問題　偏微分方程式　放物型方程式

１．研究開始当初の背景

反応拡散方程式は生物の個体数密度分布，神経伝達，化学反応や相転移現象など，方程式が記述する数理モデルを通して，そこに現れるパターン形成の仕組みを解明したいという動機のもとで数多くの研究がなされている．単独の反応拡散方程式として，単安定な非線形項をもつ方程式の代表例である logistic 方程式や双安定反応拡散方程式の代表例である Allen-Cahn 方程式や Nagumo 方程式は，数理生態学，相転移現象，集団遺伝学や 神経伝達のモデル具体的な現象を記述する方程式としてだけでなく，複雑なパターン形成のメカニズムを説明するための単純なモデル方程式として現在まで様々な研究がなされてきた．特にパターン形成の観点から，解の形状に関する研究が中心に行われている．その中で，進行波と呼ばれる空間内を形を変えずに一定の方向へ進む波の存在とその安定性，また空間内の狭い範囲で急激に値が変化する遷移層という形状をもつ解のダイナミクスの解析や定常解の構成は様々な観点から研究が行われてきた．これらはいずれも，パターンが空間内をどう伝播するかという問題に関する研究である．私は現在まで双安定反応拡散方程式を 1 次元の数直線上で考え，方程式に空間非斉次性を含み，その空間非斉次性がパターンの伝播にどのような影響を与えるかという問題について研究を行ってきた．一方，本研究が開始される直前，具体的には 2010 年に Du 教授と Lin 教授は，外来生物種の侵入のモデルを logistic 方程式の自由境界問題として定式化しその解の漸近挙動についての研究成果を得た．この研究に端を発し，空間内をパターンが伝播する現象の研究の新しい方向として外来生物種侵入モデルの自由境界問題は研究が活発化し，進行波を基にした現在までの研究と密接に関連を保ちながら異なる側面を見せている．2011 年には Du 教授と Lou 教授により 2010 年の研究を単安定，双安定，燃焼型とよばれる３つのタイプの非線形項をもつ方程式へ拡張し，漸近挙動に関する詳しい研究成果を得た．本研究ではその現状を受け，自由境界問題により定式化された単独の反応拡散方程式における伝播現象の研究との関連性を密に研究を進めていくことになった．

２．研究の目的

本研究の研究課題名にあるように，空間非斉次性をもつ反応拡散方程式において空間内をパターンがどのように伝播していくかを明らかにすることが本研究の最終目的であるが，１の「研究開始当初の背景」で述べた通り，空間内のパターン伝播に関する問題は外来生物種侵入モデルの自由境界問題の研究に端を発し，新しい方向性を見せていることから，まずこの自由境界問題の解の漸近挙動に関する性質について詳しく調べることを目的とした．外来生物種侵入の自由境界問題は以下のように表される：

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), & t>0, g(t)<x<h(t), \\ u(t,g(t)) = u(t,h(t)) = 0, & t>0, \\ h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t>0, \\ g'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t>0, \\ -g(0) = h(0) = h_0, & \\ u(0,x) = u_0(x), & -h_0 \le x \le h_0 \end{cases}$$

生物の個体数密度を表す u は第１式にある反応拡散方程式を見たし，未知の境界 $x=g(t)$, $x=h(t)$ で第２式を満たす．また，境界の運動は第３，４式の Stefan 条件によって決定される．自由境界問題はこの $(u(t,x),g(t),h(t))$ を求める問題であり，組を解とする．この問題において重要な問題は解 $(u(t,x),g(t),h(t))$ の $t\to\infty$ における挙動を決定することである．この問題に対し 2010 年に Du 教授と Lin 教授により，非線形項が $f(u)=u(1-u)$，つまり logistic タイプの非線形項のとき, 次の興味深い結果が得られた.

(1)　次の２通りのいずれかが起こる：
　(a)　Spreading：
　　$(g(t),h(t))\to\mathbb{R}$,
　　$u(t,x)\to 1$ 広義一様
　(b)　Vanishing：
　　$(g(t),h(t))\to(h_\infty,g_\infty)$
　　$u(t,x)\to 0$ 一様

(2)　上の(a) spreading が起こるとき，非線形項のみから定まる定数 $c^*>0$ が存在して

$$\begin{matrix} h(t) = [c^*+o(1)]t \\ g(t) = [-c^*+o(1)]t \end{matrix} \quad (\text{as } t\to\infty)$$

その後 Du 教授と Lou 教授らによって上記の結果は非線形項が単安定，双安定，燃焼型の場合へ拡張された．具体的には，双安定と燃焼型の場合は上記の Spreading と Vanishing の閾値的な現象が現れる他は主として Spreading と Vanishing が起こるということである．

本研究ではこの自由境界問題の解 u の $t\to\infty$ における形状を調べることである．研究開始当初，解 u の形状についての結果は特になく，形状を得るためには(2)の自由境界の進行速度の評価は十分でなく，さらに良い評価を得ることが必要であった．

３．研究の方法

研究手法はDu教授らによって定式化された自由境界問題における優解・劣解の方法と放物型方程式の正則性理論である．自由境界問題におけるこれらの研究手法を得るために，平成24年度は国立高等専門学校在外研究員制度を利用し，Du教授(University of New England, Armidale，オーストラリア）のもとに１年間滞在する機会を得たため，補助期間を１年延長した．帰国後の平成25年度はそこで成果はさらに移流項を含む問題(後述)に発展させるために，Lou教授(同済大学，上海,

中国)のもとを１週間程度滞在し, 新たな研究手法を得ることができた．自由境界問題はオーストラリアのDu教授, およびLou教授を中心とした中国人研究者によって研究が進められており，連絡を取りながら研究を進めていった．

４．研究成果

(1)　Du教授とZhou氏(東京大学)との共同研究により，spreading が起こる際，自由境界の進行速度に関して次の詳しい評価を得ることに成功した：ある $\hat{H}, \hat{G} \in \mathbb{R}$ があって

$$h(t) - c^* t \to \hat{H} \text{ (as } t \to \infty)$$
$$g(t) + c^* t \to \hat{G} \text{ (as } t \to \infty)$$

が成り立つ．また，非線形項のみによる関数 q^* が存在して

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[0,h(t)]} |u(t,x) - q^*(h(t)-x)| = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[g(t),0]} |g(t,x) - q^*(x-h(t))| = 0$$

が成り立つ．この q^* は自由境界問題における進行波の役割を表すもので，半直線で定義される関数のため, Du 教授らは semi-wave と名付けた.

(2)　同じく Du 教授, Zhou 氏との共同研究により，高次元で球対称な設定

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & t>0,\ 0<r<h(t) \\ u_r(t,0) = u(t,h(t)) = 0, & t>0, \\ h'(t) = -\mu u_r(t,h(t)), & t>0 \\ u(0,r) = u_0(r), & 0 \le r \le h_0 \end{cases}$$

の場合，自由境界の進行速度はある $c_N > 0$ と $\hat{H} \in \mathbb{R}$ が存在して

$$h(t) - c^* t + c_N \log t \to \hat{H} \text{ (as } t \to \infty)$$

が成り立つことを示した．これは１次元と多次元で自由境界の進行速度に違いが現れることを示している.

(3)　兼子氏(早稲田大学)との共同研究により移流項を含む問題

$$\begin{cases} u_t + \beta u_x - u_{xx} = f(u), & t>0, g(t)<x<h(t), \\ u(t,g(t)) = u(t,h(t)) = 0, & t>0, \\ h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t>0, \\ g'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t>0, \\ -g(0) = h(0) = h_0, & \\ u(0,x) = u_0(x), & -h_0 \le x \le h_0 \end{cases}$$

における自由境界の進行速度の評価について研究を行った．移流項の係数である β は正の定数である．この問題については Gu 氏(同済大学, 上海, 中国), Lin 教授(揚州大学, 揚州，中国)，Lou 教授(同済大学，上海，中国)により，$f(u) = u(1-u)$の場合に研究がなされており，次の結果が得られている：Spreading はβ が(移流項のない方程式における)進行波の最小速度より小さい場合のみ起こり，そのときの左右の自由境界の漸近的進行速度は異なる，つまり，$0 < c_l^* < c_r^*$ が存在して，

$$\begin{matrix} h(t) = [c_r^* + o(1)]t \\ g(t) = [-c_l^* + o(1)]t \end{matrix} \quad \text{(as } t \to \infty)$$

が成り立つ．これを受け，兼子氏と私の共同研究により，非線形項が単安定，双安定，燃焼型の３タイプの場合について，この問題に対して(1)と同様な自由境界の進行速度に関する詳しい評価と漸近的形状が semi-wave に近づく(ただし左右の形状は移流の効果により異なる)ことを示すことに成功した．手法は(1)と大幅に異なり，放物型方程式の零点理論を使ったが，この手法が有効であることは，Lou 教授を訪問した際の議論によって明らかとなった．この成果は学術論文「Spreading speed and sharp asymptotic profiles of solutions in free boundary problems for reaction-advection-diffusion equations」としてまとめ，現在投稿中である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Yihong Du, <u>Hiroshi Matsuzawa</u> and Maolin Zhou, Spreading speed and profile for nonlinear Stefan problems in high space dimensions, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees に掲載決定.

② Yihong Du, <u>Hiroshi Matsuzawa</u> and Maolin Zhou, Sharp estimate of the spreading speed determined by nonlinear free boundary problems, SIAM J. Math. Anal. 46(2014), Issue 1, 375-396(DOI: http://dx.doi.org/10.1137/130908063)

〔学会発表〕（計１１件）

① <u>Hiroshi Matsuzawa</u>, Spreading speed and asymptotic profiles for solutions in free boundary problems for nonlinear, PDEセミナー, 2014年3月24日, 同済大学, 上海，中国

② <u>Hiroshi Matsuzawa</u>, Spreading speed and profile for nonlinear diffusion problems with free boundaries，研究集会「偏微分方程式の解と幾何」，2013 年 11 月 21 日，京都大学数理解析研究所

③ <u>松澤　寛</u>，ある非線形拡散方程式の自由境界問題における spreading speed の評価と解の漸近的形状について，京都大学 NLPDE セミナー，2013 年 11 月 8 日，京都大学

④ <u>松澤　寛</u>，ある非線形拡散方程式の自由境界問題における spreading speed の評価と

解の漸近的形状について，KSU 非線形解析セミナー，2013 年 10 月 15 日，京都産業大学

⑤ Hiroshi Matsuzawa, Sharp estimate of the spreading speed determined by nonlinear free boundary problems，国際会議「Equadiff 13」，2013 年 8 月 27 日，プラハ，チェコ共和国

⑥ 松澤　寛，ある非線形拡散方程式の自由境界問題における spreading speed の評価と解の漸近的形状について，横浜数学セミナー，2013 年 7 月 22 日，横浜国立大学

⑦ 松澤　寛，ある非線形拡散方程式の自由境界問題における spreading speed の評価と解の漸近的形状について，数理解析セミナー，2013 年 5 月 16 日，首都大学東京

⑧ Hiroshi Matsuzawa, Sharp estimate of the spreading speed determined by nonlinear free boundary problems, Mathematics Seminar, 2013 年 3 月 12 日, School of Science and Technology, University of New England，アーミデール (ニューサウスウェールズ州)，オーストラリア

⑨ Hiroshi Matsuzawa, Sharp estimate of the spreading speed determined by nonlinear free boundary problems，中国科学技術大学，数学科科学院，呉文俊数学重点実験室　力学系セミナー，2012年9月20日，安徽省合肥市，中華人民共和国

⑩ Hiroshi Matsuzawa, On a dynamics of solution with a transition layer to some bistable reaction diffusion equation，国際会議「The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications」,2012 年 7 月 4 日，オーランド，アメリカ合衆国

⑪ Hiroshi Matsuzawa, Dynamics of a Front Solution for a Bistable Reaction-diffusion Equation with a Degenerate Spatial Heterogeneity, SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, 2011 年 5 月 25 日, Snowbird(ユタ)，アメリカ合衆国

〔その他〕
ホームページ等
http://user.numazu-ct.ac.jp/~hmatsu/

６．研究組織
(1)研究代表者
　松澤　寛（MATSUZAWA Hiroshi）
　研究者番号：８０４１３７８０

(2)研究分担者
　なし

(3)連携研究者
　なし