

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 3 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740168

研究課題名(和文) 超対称ゲージ理論における非局所的演算子と経路積分

研究課題名(英文) Non-local operators in supersymmetric gauge theories and the path integral

## 研究代表者

奥田 拓也 (Okuda, Takuya)

東京大学・総合文化研究科・助教

研究者番号：90595646

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：当研究課題では、我々が住む世界の最小単位である電子・クォーク・光子などの素粒子を記述する、ゲージ理論と呼ばれる物理理論を調べた。特に超対称性という、実験的発見が期待され理論的にも重要な対称性が存在する物理系を研究した。これらの理論では、仮想的な非常に重い粒子の運動として定義されるループ演算子などの非局所的演算子が、理論の性質を調べる上で重要である。この研究では非局所的演算子に関する物理量を超対称局所化という手法で厳密に計算し、超対称ゲージ理論の構造を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：This research is about gauge theory, which describes the physics of elementary particles such as the electron, quarks, and the photon. In particular we studied systems with so-called supersymmetry. Supersymmetry is a symmetry that we hope will be discovered in the coming years, and is a fundamental concept when studying structures of gauge theories. In these theories, non-local operators play important roles. Prominent examples are loop operators, which are defined as a motion of a hypothetical particle with infinite mass. In this research we computed quantities related to non-local operators by applying the method known as supersymmetric localization. This helped us reveal the structures of the supersymmetric gauge theories.

研究分野：素粒子論

キーワード：素粒子(理論) 数理論理

### 1. 研究開始当初の背景

我々の世界はゲージ場の量子力学的な理論である素粒子標準模型で記述されている。クォークの閉じ込めや電磁双対性など、ゲージ理論の非摂動的なダイナミクスを定量的に理解する上で、ウィルソン・ループのような非局所的演算子は有用である。また加速器実験で測定された3つのゲージ結合定数は超対称性を仮定してくりこみ群を適用すると高エネルギーで等しくなることから、超対称な統一理論が存在すると考えるのは自然である。このように、非局所的演算子と超対称性は自然界を理解する上で重要である。

超対称性を持つゲージ理論は深い数学的構造を持ち、純理論的にも中心的なテーマである。80年代以降、ある種の物理理論がとりわけ豊かな構造を持ち、双対性を通じて互いに密接な関係を持つことが明らかになってきた。これらは超対称ゲージ理論、超重力理論、行列模型、2次元共形場理論などであり、多くの場合に弦理論の極限として現れる。特別な物理理論はそれ自身が「自然」を構成しており意義深い研究対象だという科学の新しいパラダイムは、例えば「弦理論は発見されるのではなく発見される」という言い方で表現される。物理量は複数の双対な理論を用いて定義できるので、ある理論での計算は他の理論で「検証可能な予想」となり、予想と新たな計算の一致を示す「数学的な実験」によって理解を深めていくことができる。

非局所的演算子は AdS/CFT などゲージ・重力対応においても有用であり、代表者はこれらの研究で成果を出してきた。近年の超弦理論やゲージ理論の発展においても、非局所的演算子と超対称性は大きな役割を果たしてきた。例えば幾何学的ラングランズ対応へのゲージ理論的アプローチでは非局所的演算子と超対称性は不可欠であり、その解析から非局所的演算子の理解が深まってきた。

超対称なゲージ理論ではある種の物理量を解析的に計算することが可能である。サイバークとウィッテンは、高い超対称性 ( $N=2$ ) を持つゲージ理論の低エネルギーでのダイナミクスを理論の無矛盾性から間接的な方法で決定した。ネクラソフは同じゲージ理論でインスタントン分配関数を定義して局所化という方法により厳密に計算し、サイバークとウィッテンの結果を直接導くことに成功した。またペストゥンは4次元球面上の  $N=2$  超対称ゲージ理論で分配関数とウィルソン・ループの期待値を局所化法で計算した。

代表者とゴミスとトランカネリは、 $N=4$  ヤング・ミルズ理論でトーフト・ループの期待値を摂動計算により主要なオーダーで求め、ペストゥンの結果と電磁双対性を介して一致することを示した。2009年には、クラス S と呼ばれることになる種類の  $N=2$  超対称ゲージ理論の結合定数や質量がリーマン面の幾何学的な量に対応することを、ガイ

アウトが指摘した。代表者はドゥルッカーとモリソンとの共同研究で、A1型クラス S 理論で超対称性を保つループ演算子が、リーマン面上の閉曲線により分類されることを示し、電磁双対性でのループ演算子の変換則を決定した。アルダイとガイアウトと立川はクラス S 理論と2次元共形場理論の間の定量的関係を発見した。この AGT 関係によれば、ネクラソフのインスタントン分配関数はリユヴィル理論という2次元共形場理論の共形ブロックに一致し、またペストゥンが計算した  $S^4$  上の分配関数はリユヴィル理論での相関関数に等しい。代表者はドゥルッカーとゴミスとテシュナーとの共著論文で、 $S^4$  上でのループ演算子の期待値をリユヴィル理論を用いて計算する方法を(アルダイたちのグループと同時に)提唱し、ウィルソン・ループの場合にはペストゥンが導いた期待値と一致することを示した。

### 2. 研究の目的

本研究の主な目的は、超対称性を持つゲージ理論において、ループ演算子など非局所的演算子の期待値や相関関数を超対称局所化法により厳密に計算することである。またその結果を用いて2次元・4次元対応や2次元共形場理論の理解を深めることも目的とした。長期的な目的としては、超対称ゲージ理論だけではなく、より広い場の理論や統計力学系での非局所的演算子に関わる物理量を理解することも目指した。

### 3. 研究の方法

本研究で用いる主な手法である局所化とは、超対称性によりボゾンとフェルミオンの経路積分への寄与をほとんど相殺し、場の経路がなす無限次元空間での積分を有限次元部分空間での積分に帰着する強力な計算手法である。分配関数だけでなく、超対称性を保つ演算子、特に場の境界条件で定義される演算子である非秩序的演算子がある場合にも適用できる。

インスタントン分配関数のように非摂動的な寄与がある場合にはソリトンのモジュライ空間上の同変積分が現れる。無限に重いモノポールの世界線として定義されるトーフト・ループの解析[3,4]においても同様に、非摂動的な寄与をモノポールのモジュライ空間での同変積分に帰着させて計算した。非摂動的寄与がない場合には、比較的単純な有限次元の行列積分に帰着する。

ペストゥンの4次元球面での計算では1ループ行列式は同変指数の理論により評価され、我々のトーフト・ループの計算においても同理論を用いた。奇数次元である3次元では、指数理論は適用可能でないと従来考えられており、既存の局所化計算では微分演算子の固有値をあらわに数え上げることで1ループ行列式を計算していた。発表論文[2]

では、奇数次元での局所化計算においても、群作用により実効的に次元を減らすことで指数理論を適用できることを示した。この手法は3次元理論での因子化などで応用されている。

#### 4. 研究成果

##### (1) トフフト・ループ

ゴミスとペストゥンとの共同研究では、4次元球面上で  $N=2$  超対称性を持つゲージ理論のトフフト・ループの期待値を超対称局所化により計算した[4]。まず非摂動的な寄与がモノポール・モジュライ空間上の同変積分として与えられることを示した。これは局所化による非秩序的演算子の計算の最も基本的な例と言える。またこれが2次元・4次元対応から予想される結果と非自明に一致することを示した。その後、伊東佑人氏、瀧雅人氏とともに、 $S^1 \times R^3$  上のループ演算子期待値を計算し、この物理量が(幾何学的ラングラーズ対応に現れる)ヒッチン・モジュライ空間の変形量子化を実現することを示した[3]。これらの計算結果は、 $S^1 \times S^3$  上でループ演算子がある場合の超共形指数の計算などに応用されている。

##### (2) ヴォーテックス・ループ

3次元理論での非秩序演算子であるヴォーテックス・ループの期待値を3次元球面や  $S^1 \times S^2$  で計算した[2]。上記のように、指数理論を用いた手法を開発することで計算を行った。ヴォーテックス・ループの計算結果が、ミラー対称性と呼ばれる双対性を通じて Wilson ループ演算子の計算結果と一致することを示した。これは4次元でのトフフト・ループ演算子の計算の拡張と考えることができ、3次元・3次元対応などにおいて応用が見つかっている。

##### (3) ALE 空間上のインスタントン分配関数

ALE 空間と呼ばれる、曲がった高い対称性をもつ時空上では、従来同等と考えられてきた二通りのインスタントン分配関数の定義があったが、これらが異なる結果を与えることを指摘し、両者の非自明だが簡潔な関係を予想し、具体例で確認した[1]。

(4) 半球面分配関数とドメイン・ウォール  
2次元半球面上の  $N=2$  超対称ゲージ理論に  $B$  型超対称性を保つ境界条件を課した系での分配関数を局所化の手法により計算した(プレプリント arXiv:1308.2217、本田大悟氏と共同研究)。境界条件は弦理論での  $D$  プレーンを表しており、低エネルギーで理論がある種のコンパクトなカラビ・ヤウ多様体のシグマモデルを実現する場合には、分配関数が4次元  $N=2$  超対称理論での粒子の中心電荷を表すことを、我々の論文と同時期に発表された堀氏と Romo 氏の論文が示した。また2次元のサイバ格的な双対性を考え、分配関数が双対性変換のもとで不変である場合と簡単な式に従って変換をする場合があることを見つけた。 $N=4$  対称性を持つある種のゲージ理論

には、可積分なスピン鎖模型との関係があることが知られており、ドメインウォールが場の理論の持つ隠れた対称性を実現する可能性がネクラソフとシャタシヴィリにより示唆されている。我々は実際に、 $SL(2)$  アフィン・ヘッケ代数を実現するドメインウォールを構成してみせた。2次元理論のドメインウォールは、4次元ゲージ理論の2次元表面演算子に線演算子が束縛した状態と考えることもでき、AGT 関係を介して戸田共形場理論のループ演算子とも同一視できることを示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 } (計 6 件)

[1] "Scheme dependence of instanton counting in ALE spaces", Y. Ito, K. Maruyoshi and T. Okuda, JHEP 1305, 045 (2013), 査読有, 10.1007/JHEP05(2013)045.

[2] "Exact results for vortex loop operators in 3d supersymmetric theories", N. Drukker, T. Okuda and F. Passerini, JHEP 1407, 137 (2014), 査読有, 10.1007/JHEP07(2014)137.

[3] "Line operators on  $S^1 \times R^3$  and quantization of the Hitchin moduli space", Y. Ito, T. Okuda and M. Taki, JHEP 1204, 010 (2012), 査読有, 10.1007/JHEP04(2012)010.

[4] "Exact Results for 't Hooft Loops in Gauge Theories on  $S^4$ ", J. Gomis, T. Okuda and V. Pestun, JHEP 1205, 141(2012), 査読有, 10.1007/JHEP05(2012)141.

[5] "On the instantons and the hypermultiplet mass of  $N=2^{*}$  super Yang-Mills on  $S^4$ ", T. Okuda and V. Pestun, JHEP 1203, 017 (2012), 査読有, 10.1007/JHEP03(2012)017.

[6] "String scattering in flat space and a scaling limit of Yang-Mills correlators", T. Okuda and J. Penedones, Phys. Rev. D 83, 086001 (2011), 査読有, 10.1103/PhysRevD.83.086001.

{ 学会発表 } (計 10 件)

(1) T. Okuda, "Line operators in SUSY gauge theories and the 2d-4d relations", これからの弦理論, 2015/2/21, 理化学研究所(埼玉県・和光市).

(2) T. Okuda, "Exact results for boundaries and domain walls in 2d supersymmetric

theories”, Integrability, Symmetry and Quantum Space-Time, 2014/1/9, 基礎物理学研究所 (京都府・京都市) .

(3) T. Okuda, “Exact results for boundaries and domain walls in 2d supersymmetric theories”, Physics Around Mirror Symmetry, 2015/10/22, Perimeter Institute for Theoretical Physics( Waterloo, Canada ) .

(4) T. Okuda, “Hemisphere partition function, domain walls, and algebra”, Workshop on Geometric Correspondences of Gauge Theories, 2013/9/9, Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics ( Trieste, Italy ) .

(5) T. Okuda, “Exact results for line operators in four and three dimensions”, 2013/3/2, 静岡素粒子集中セミナー, 静岡大学 ( 静岡県・静岡市 ) .

(6) T. Okuda, “Localization methods in supersymmetric gauge theories” and “Vortex loop operators in 3d supersymmetric theories”, Bangkok Workshop on Gravity, Gauge Theory, Matrices and Strings, 2013/1/29, Chulalongkorn University (Bangkok, Thailand).

(7) T. Okuda, “Vortex partition functions, Landau-Ginzburg models, and the Bethe equations”, Gauge Theory Angle at Integrability, 2012/11/15, Simons Center for Geometry and Physics (Stonybrook, USA).

(8) T. Okuda, “Vortex loop operators and mirror symmetry in three dimensions”, Autumn Symposium on String/M Theory, 2012/9/20, Korea Institute for Advanced Study (Seoul, Korea).

(9) T. Okuda, “Wilson-’t Hooft operators and the 4D/2D correspondence”, Simons

Summer Workshop in Mathematics and Physics, 2012/8/13, Simons Center for Geometry and Physics (Stonybrook, USA).

(10) T. Okuda, “Techniques for exact calculations in four-dimensional SUSY gauge theories”, Asian Winter School on Strings, Particles and Cosmology, 2012/1/15-19, 群馬県・草津町.

(11) T. Okuda, “Exact results for ’t Hooft loops in gauge theories on  $S^4$ ” and “Line operators on  $S^1 \times \mathbb{R}^3$  and quantization of the Hitchin moduli space”, 4th Taiwan String Workshop, 2011/12/16-17, National Chiao Tung University (Hsinchu, Taiwan).

#### 6 . 研究組織

研究代表者: 奥田 拓也 ( TAKUYA OKUDA )  
東京大学・総合文化研究科・助教  
研究者番号 : 90595646