

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 18 日現在

機関番号：56203

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740212

研究課題名(和文) 超対称な高次元非可換幾何とトポロジ-的量子多体状態の研究

研究課題名(英文) Research about supersymmetric higher dimensional non-commutative geometry and topological quantum many-body states

研究代表者

長谷部 一気 (Hasebe, Kazuki)

香川高等専門学校・一般教育科・講師

研究者番号：60435469

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円、(間接経費) 630,000円

研究成果の概要(和文)：超対称な高次元の非可換幾何の数理を確立し、それをトポロジカルな物理系に応用する研究を行った。平成23年度は、非可換幾何の高次元、超対称の数理的構築を球、双曲多様体について行った。その数理的研究と並行して、超対称な量子スピン系、非エルミート量子力学への応用した研究を行い、端状態、隠れた秩序といったトポロジ-的構造を明らかにした。平成24年度は、超対称な量子スピン系の研究を更に深化させ、量子エンタングルメントといった最近の提案された概念の実現について研究を行った。平成25年度は、非可換幾何をトポロジカル絶縁体(特にAクラス、AIIIクラス)に適応し、その物理を解析した。

研究成果の概要(英文)：We established supersymmetric higher dimensional non-commutative geometry and applied its mathematics to the topological matters. In 2011, we explored non-commutative geometry for supersymmetric higher dimensional spheres and hyperboloids. Besides, we applied the mathematics to the supersymmetric quantum spin systems and non-Hermitian quantum mechanics and exploited their topological structures such as edge states and hidden order. In 2012, we further investigated the supersymmetric quantum spin system especially about the recently proposed quantum entanglement. In 2013, we applied the non-commutative geometry to the topological insulators (in particular A-class and AIII-class) and analyzed their physical properties.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学 素粒子 原子核 宇宙線 宇宙物理

キーワード：非可換幾何 量子スピン系 トポロジカル絶縁体 非エルミート量子力学 超対称性 南部括弧

### 1. 研究開始当初の背景

近年、素粒子論と物性理論の学際的研究が盛んである。特に物性理論において、自発的対称性の破れで規定されないトポロジカルな秩序を有する系が大きな注目を集めている。その典型的な系としては、量子反強磁性スピン系があり、トポロジカル秩序が1次元でも発現している。一般的にトポロジカル秩序の秩序変数を特定することは容易ではないが、量子反強磁性状態(特にバレンスバンド状態)ではストリング秩序と呼ばれる隠れた非局所的秩序変数が存在し、計算機を用いて比較的容易に計算を遂行することが出来る。ホールをドープしたバレンスバンド状態は、スピン自由度を(シュインガー)ボゾンで表し、ホールをフェルミオンで表現することにより、超対称性と呼ばれるボゾンとフェルミオンを入れ替える特殊な対称性を有する。

一方、弦理論の進展の過程において、その幾何を表現する幾何学的な形式として非可換幾何学が注目されている。特に、行列模型の古典解として実現する高次元の非可換幾何の研究が著しく進んだ。しかしながら、超対称性を有する場合の非可換幾何学についてはその数学的な複雑性のため、発展途上である。

一見、トポロジカル秩序を有する量子反強磁性状態と非可換幾何は無関係のように思われるが、実はそれらの数学的構造は共にシュインガー演算子形式に基づいており、密接に関係している。例えば、非可換幾何におけるファジー球面の数学は、AKLT状態と呼ばれる量子反強磁性状態に対応している。そのため、非可換幾何の発展した数理構造を適応し、新たな量子反強磁性のモデルを構成することが出来ると期待された。

### 2. 研究の目的

上述の観点に基づいて、本研究では非可換幾何そのものの数理構造の拡張(特に超対称性を有する場合)と、その数理を応用した新たなトポロジカルな量子反強磁性モデルの構築とその物理の解明について研究を行う。特に超対称性に由来する新奇なトポロジカルな性質の解析を主眼とする。

### 3. 研究の方法

本研究では、非可換幾何の数理的拡張とトポロジカルな量子反強磁性状態の構築という二本立ての構成になっている。そのため、まず超対称性を有するように非可換幾何を拡張し、その後その数理を量子反強磁性状態に応用する。具体的には次のように行う。

(1) 曲がった典型的な非可換多様体である高次元ファジー球面に、超対称性を組み込むように拡張する。非可換の数理構造は代数で与えられるので、超対称な代数である

$UOSp(1|4)$ 代数を用いて、4次元の非可換球面に超対称性を導入する。

(2) 超対称な量子反強磁性モデルの構築とそのトポロジカル秩序の解明

超対称な反強磁性モデル( $UOSp(1|2)$ バレンスバンド状態)における隠れた秩序(ストリングオーダーパラメーター)と、その励起等の解析を行う。

高い超対称性( $UOSp(1|4)$ 対称性)を有する反強磁性モデルの構築とそのトポロジカル秩序に由来した性質、特に端状態、量子エンタングルメントについて調べる。

ドイツ、アルメニア、ギリシャ等で開催された国際的な数理物理の会議に出席し、自分の研究成果を報告するとともに、最新の世界の研究成果の情報収集を行った。2013年度には在外研究員として、スタンフォード大学の物性理論の研究室に一年間滞在しトポロジカル物質群の研究に従事した。

### 4. 研究成果

本研究成果は以下の(1)~(3)に大別できる。

(1) 超対称高次元非可換球面の数理的構築[論文番号 に対応]

これまで、超対称代数に基づく超対称な非可換球面の構築としては $SU(2)$ 代数を部分代数に持つ $UOSp(1|2)$ 代数による2次元の超対称性非可換球が知られていた。この構成を拡張し、 $UOSp(1|4)$ 代数という $SO(5)$ 代数を部分代数にもつ超対称な代数から4次元の超対称な非可換球の数理的構成に成功した。まず古典版である超対称なホップ写像を、 $UOSp(1|4)$ のガンマ行列を用いて構成した。(この高次元の超対称なホップ写像の構築も世界で初めてであり、本研究の成果である。)その後その構成を量子化することにより、4次元の超対称性を有する非可換球面の構成に成功した。更に $UOSp(N|4)$ の代数を使うことによって、より超対称性の高い4次元非可換球面の数理的構成も行った。

研究過程で低次元の超対称性の非可換球面との違いが明らかになった。2次元の非可換超球面の場合、 $UOSp(1|2)$ のフェルミオン生成子と同数の超対称を有するが、4次元の非可換超球面の場合、 $UOSp(1|4)$ のフェルミオン演算子の数より少ない数の超対称性を非可換球面が有することが分かった。これは、本研究で用いたシュインガー演算子形式に基づく数理的帰結である。更に $UOSp(N|4)$ の代数で構成された4次元非可換球面は当初の代数である $UOSp(N|4)$ より大きい $SU(4|N)$ の代数構造に従うことを明らかにした。拡張された代数構造は、非可換超球面上の量子ゆらぎに起因することを、2点関数の振る舞いを調べ、その物理的解釈を与えた。

(2) 超対称な量子反強磁性模型の構築とトポロジ的性質の解明[論文番号]

超対称な数理を応用し、高い超対称性を有する反強磁性スピン模型の解析を京都大学の戸塚圭介氏とともに行った。まず、以前私が米国のメンバーと共に構成した  $UOSp(1|2)$  の超対称性を有する超対称な量子反強磁性状態の詳細な解析を行った。超対称性を導入したことによる特筆すべき特徴が以下のように明らかになった。(i) バルクのスピンの偶奇性によらず、系が有限の超対称を有するときにはストリング秩序変数が有限の値をとる。(ii) ボゾンとフェルミオンの由来した2種類の異なるエネルギー分散を有する励起が存在する。特に(i)のストリング秩序変数が有限の値をもつことは、超対称が存在する場合にトポロジ的秩序が安定であることを示唆している。

その点を更に調べるために、引き続き戸塚氏と超対称性量子反強磁性状態の解析を行った。また(1)で行った  $UOSp(N|4)$  に基づく超対称な高次元非可換球の数理を適用し、これまで知られていた超対称な量子反強磁性状態より高い超対称性を有する模型を構成した。これら二つの超対称性を有する量子反強磁性模型に関して、端状態、量子エンタングルメントの観点から研究を行いその振る舞いを明らかにした。具体的には、超対称な量子反強磁性鎖にカットを入れて、A と B の二つの系に分けることによって、そのシュミット係数の振る舞いからエンタングルメントスペクトルを読み取った。その結果、超対称を有する場合にバルクのスピンの偶奇によらず、エンタングルメントスペクトルがボゾン、フェルミオンセクターに分かれてそれぞれ縮退を持つことが明らかになった。エンタングルメントスペクトルの縮退は、トポロジカル秩序の指標として近年提案されたものであり、実際我々の超対称な量子反強磁性状態がトポロジ的秩序を有することを示している。更に興味深いことには、超対称性が存在する場合は、端状態として反整数のスピンの必然的に現れ、それがトポロジ的安定性を担っているという直観的理解も得られた。

このように、超対称性を系が有す場合には必ず系は安定なトポロジ的秩序を有することが本研究により明らかになった。我々の研究は量子反強磁性の模型を用いたものであるが、研究の帰結は一般的な超対称性の特徴に由来するものである。そのため今後一般的な超対称を有する系にトポロジ的な考え方を応用する際に、重要な知見となると考えられる。

(3) 高次元非可換双曲面の数理的構築と非エルミートな量子力学系におけるトポロジ的状態の研究[論文番号]

高次元球面における非可換幾何を双曲面に拡張する研究を行った。球面と双曲面は、ともに最大な対称性を有する空間(maximally symmetric space)であり、双曲面の幾何学も数学的な応用上重要である。高次元の非可換球面の幾何を不定形量の群の代数に基づくことにより、自然に構成できることを示した。また双曲面の数理に基づき、非エルミートな量子力学系におけるトポロジ的相の研究を、(当時の)物性研究所の甲元真人氏、佐藤昌利氏、江崎健太氏と共同で行った。トポロジカル相が非エルミート量子力学においても存在することを簡単な模型を用いて示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Kazuki Hasebe, Keisuke Totsuka, ``Topological many-body states in quantum antiferromagnets via fuzzy super-geometry'', *Symmetry* 5(2013)119-214, 査読有

Kazuki Hasebe, Keisuke Totsuka, ``Quantum entanglement and topological order in hole-doped valence bond solid states'', *Phys.Rev.B* 87(2013)045115 査読有

Kazuki Hasebe, ``Non-compact Hopf maps and fuzzy ultra-hyperboloids'', *Nucl.Phys. B* 865 (2012) 148-199 査読有

Kazuki Hasebe, ``Fuzzy super-geometry and topological many-body states'', *素粒子論研究* (2012) vol.12 査読無  
Kenta Esaki, Masatoshi Sato, Kazuki Hasebe, Mahito Kohmoto, ``Edge states and topological phases in non-Hermitian systems'', *Phys.Rev. B* 84 (2011) 205128 査読有

Kazuki Hasebe, ``Graded Hopf maps and fuzzy superspheres'', *Nucl.Phys. B* 853 (2011) 777-827 査読有

Masatoshi Sato, Kazuki Hasebe, Kenta Esaki, Mahito Kohmoto, ``Time-reversal symmetry in non-Hermitian systems'', *Prog.Theor.Phys.* 127 (2012) 937-974 査読有

Kazuki Hasebe, Keisuke Totsuka, ``Hidden order and dynamics in supersymmetric valence bond solid state formalism'', *Phys.Rev.B* 84 (2011) 104426 査読有

[学会発表](計 11 件)

Kazuki Hasebe, ``Non-commutative geometry in higher dimensional quantum Hall effect as A-class topological insulator'', (Workshop on Noncommutative field theory and gravity), 2013年9月8-15, Corfu, Greece.

長谷部 一気, ``Non-commutative geometry and quantum Hall effect in any dimensions'', Exotic space-time geometry and its applications, 2013年2月23, 理化学研究所(埼玉 和光) 招待講演

長谷部 一気, ``Quantum Antiferromagnets from fuzzy (super-)geometry'', 四国セミナー, 2012年12月15-16日, 高知大学

長谷部 一気, ``非コンパクトなホップ写像とファジーな双曲多様体'', 日本物理学会2012年秋季大会, 2012年9月11日, 京都産業大学

Kazuki Hasebe, ``Quantum Antiferromagnets from fuzzy super-geometry'', Supersymmetry in Integrable systems-SIS, 2012年8月27日~30日, Yerevan Armenia 招待講演

長谷部 一気, ``Supersymmetry and higher dimensional fuzzy supersphere'', 四国セミナー, 2011年12月17-18日, 愛媛大学

Kazuki Hasebe, ``Supersymmetric valence bond solid states and generalized hidden order'', Novel quantum states in condensed matter 2011年11月21-25日, 京都大学 基礎物理学研究所

長谷部 一気, ``超対称なバレンスバンド状態におけるエンタングルメントと端状態'', 日本物理学会2011年秋季大会, 2011年9月21-24日, 富山大学

長谷部 一気, ``一般化されたホップ写像とファジー多様体'', 日本物理学会2011年秋季大会, 2011年9月16日-19日, 弘前大学

Kazuki Hasebe, ``Generalized Hopf maps and fuzzy manifolds'', Supersymmetry in Integrable systems-SIS, 2011年8月1日~4日, Hannover, Germany 招待講演

長谷部 一気, ``Fuzzy super-geometry and topological many-body states'', 場の理論と弦理論, 2011年7月15日~29日, 京都大学 基礎物理学研究所

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

長谷部 一気 (HASEBE KAZUKI)

香川高等専門学校(詫間キャンパス) 講師

研究者番号: 60435469

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: