様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：８２４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４０３５７
研究課題名（和文）状態空間における存在確率分布の直接時間積分

研究課題名（英文）Numerical simulation of probability distribution in phase space

研究代表者
西澤　誠也（Nishizawa, Seiya）

独立行政法人理化学研究所・計算科学研究機構・研究員

研究者番号：４０４４７８９２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：カオス的性質をもつ非線形システムの長期予報には、決定論的な手法ではなく、確率的な手法が必須である。大きな自由度の系においては、状態空間における確率分布の時間発展方程式を直接解く方法は計算量が膨大であるため、一般的にモンテカルロ的な手法が用いられる。本研究では、比較的大きな自由度の系における確率分布の直接数値計算の可能性の検討を行った。現実的な計算量で計算を行うためにはいくつかの近似を用いる必要があり、同じ計算量のもとでモンテカルロによる手法と比較において、計算精度が悪くという結果となった。

研究成果の概要（英文）：Probabilistic methods are necessary for long term predictions in nonlinear system due to their chaotic behavior. Direct numerical integration of the probability distribution in the phase space requires so huge amount of calculation in the case of systems with high degree of freedom, that Monte Carlo simulations are often used in such cases. In this study, possibility of the numerical integration of the probability distribution is investigated. Several approximations are employed to reduce the amount of the calculation, so the results have less accuracy than those of the Monte Carlo calculations.

研究分野：大気力学

キーワード：存在確率分布　数値計算

１．研究開始当初の背景
大気システムを初めとする非線形システムでは、そのカオス的性質より、決定論的数値積分は短時間でのみ有効であり、決定論的な予測可能性には限界があることが知られている (Lorenz 1963 など)。したがって、長期間の予測のためには、何らかの確率論的な予測を行う必要がある。
現在行われている確率的な手法としては、モンテカルロ的な手法が一般的である。たとえば、現在の天気長期予報においては、微少に異なる条件で複数の時間積分を行うアンサンブル予報が行われている。
一方、確率的情報を得るためには、各物理量等の状態変数を座標変数とした位相空間(状態空間)上における存在確率を表す分布関数を考え、その確率分布関数の時間発展方程式を直接数値積分する方法がもっとも直接的な方法である。しかしながら、確率分布の時間発展方程式の直接計算は、計算量が非常に多く、大きな自由度の系では、現在の計算機では事実上不可能であり、結果として気象分野において、確率分布の時間発展方程式の直接計算に関する研究はあまりなされてこなかった。

２．研究の目的
本研究では、気象分野においてこれまであまり考えられてこなかった確率分布関数の直接時間積分の可能性の検討を行う。しかしながら、現時点では自由度が非常に大きな気象モデルそのものを扱うことは困難である。したがって、気象モデルと類似点をもち比較的小さな自由度の系を対象に、数値計算手法の開発を行う。従来のモンテカルロ的な手法との比較により、状態空間上のおける存在確率分布の直接数値計算の可能性を検討する。

３．研究の方法
位相空間上の存在分布関数の時間発展方程式を直接数値計算により求めるために、計算量を削減するためのアルゴリズムの開発を行い、数値モデルの実装および数値計算の実施を行った。
自由度が小さな常微分方程式系を用いた予備的実験からはじめ、次に比較的自由度が大きな順圧方程式系を対象とした。
それぞれの系で分布関数の時間発展方程式の導出を行い、数値積分法の開発および、実際に数値積分を行った。また、同時に多数のアンサンブル実験を行い、相互比較によって妥当性や有効性の検討を行った。

４．研究成果
(1) 自由度が小さな常微分方程式系として、Lorenz の 3 変数系を用いて、存在確率の時間発展方程式の導出を行った。自由度が 3 であるため、状態空間は 3 次元であり、確率分布を直接積分することが可能である。
状態空間を 100x100x100 の格子に分割し、有限体積法を用いて数値積分を行った。また、参照解として、モンテカルロ法により 10 億アンサンブルの計算を行い、精度の検証を行った。確率分布の時間発展に用いる拡散の与え方や大きさが結果に大きな影響を与える事が分かった。離散化に伴う数値拡散の効果も無視できず、分布がなまりやすくなる傾向がある。これは、極値など、特異な現象の確率を過大評価してしまう可能性を示唆している。
また、同程度の計算量でモンテカルロ法との比較を行うため、100 万アンサンブルの結果と比較を行った。確率分布を直接積分する方法では、上記で述べているように分布がなまってしまい、アンサンブルによる結果の方が分布の分散の誤差は小さかった。直接積分の精度を上げるため、平均値近くの格子点間隔を小さくするなどの改良を行ったが、アンサンブルによる結果と同等の精度を得ることは出来なかった。極端値については、アンサンブルでは、アンサンブルの取り方によって、極端な過小評価になったり極端な過大評価になったりする。直接積分ではやや過大評価の傾向が見られる。

(2) 次に、より大きな自由度の系を調べるため、2 次元の順圧方程式系の実験を行った。この系は、偏微分方程式系であるため、実際には存在確率分布関数は汎関数になる。ここでは、上記の系を差分化した系を考え、差分化された方程式の常微分方程式系にした上で、その存在確率を考える。実空間を格子に区切ったときの格子点の値を独立変数とする。本研究では、格子点数を 128x128 とし、変数として渦度を用いた。つまり自由度としては、0(1 万)となる。
確率分布の時間発展を行う位相空間の次元数は、もとの系の自由度に対応する。計算量は次元数を冪数として増加するため、そのままでは計算量が膨大になる。したがって、Lorenz の 3 変数系で行ったようなナイーブな方法では、計算量の観点から事実上計算は不可能である。したがって、本研究では、以下の 2 通りの方法で自由度を減らす試みを行った。

1. 主成分分析を行い、上位の主成分のみを用いる
2. フーリエ級数展開を行い、低波数のスペクトル成分のみを用いる

線形システムでは、それぞれの成分は互いに独立であるため、一部の成分のみを考えても、その成分についての時間発展は正しく解くことが出来る。しかしながら、非線形システムでは、非線形項により各成分間には相互作用が存在する。いくつかの成分を無視すると、その無視した成分との相互作用は考慮されなくなるため、考えている成分の時間発展にも誤差が生じる。無視した成分が多い、つまり少ない成分のみを考えた場合、特に誤差が大きくなる。

直接法で数値積分を行う場合、現実的な計算量を考慮すると、状態空間の次元として５程度までしか取ることが出来ない。参照解として１万アンサンブルによるモンテカルロ実験の結果を用いて、次元数５での結果の検証を行った。結果、次元数５程度では、相互作用を無視した事による誤差が非常に大きくなり、意味のある結果を得ることができない事が分かった。

(3) より大きな次元を考えるため、全体の分布を小さな存在確率分布(カーネル)の重ね合わせで表現し、局所的には線形であること仮定することで、なるべく成分を落とさず、計算量を削減することを試みた。
それぞれのカーネルの時間発展を線形と仮定することができると、無視した成分との相互作用による誤差はなくなる。また、分布を陽に考える必要がなく、平均と分散・共分散のみを考えればよい。個々のカーネルの時間発展に必要な計算量は成分数の 2 乗に比例することになり、(2)節で考えたよりも大幅に計算量を削減でき、できるだけ成分数を落とさないことが可能である。
しかしながら、個々のカーネルの時間積分は、線形の仮定が成り立つ微少時間でのみ有効である。その積分後には、広がった個々のカーネルをまとめて、再度、線形が成り立つ局所空間におさまる小さなカーネル群へと再構築する必要がある。その際には、近接するカーネルとの重複が十分でないと再構築の際に大きな誤差が生じたり、広がったカーネルを分離することによるカーネル数の増加が必要になったりする。したがって、十分な数のカーネルを用意する必要がある。1 つあたりのカーネルの大きさを大きくすると、カーネルの個数を減らすことが出来るが、局所的に線形の仮定が成り立つ範囲を超えて大きくすることは出来ない。どの程度カーネルの数が必要となるかは、存在確率分布の形にも依存するため一概に値を定めることは出来ないが、本研究で用いた系の場合、計算資源の制限から決まるカーネルの数では誤差が大きく、有効な結果を得ることが出来なかった。

(4) 結果として、これまで検討してきた手法では、同じ計算量で比較した場合、直接数値計算ではモンテカルロ法による計算の精度を超えることが出来ないことが分かった。これは、状態空間で考えた場合、存在確率が小さな領域における計算が、確率が大きな領域の計算と同程度に必要となることが原因で考えられる。
実際の大気システムは、本研究で考えた系よりもずっと自由度が大きい。本研究で行った計算手法の必要な計算量を考えると、現在の計算機の発展速度から推測すると、少なくとも今後 100 年以内には、現実大気の存在確率の直接数値計算を行うことは困難であると予想される。
しかしながら、現在行われているモンテカルロ手法では、極端値の評価が難しいという問題がある。したって、自然災害等を考えるうえでは現状の手法は必ずしも最適であるとはいえない。したがって、今後は、モンテカルロ手法と、直接積分の双方の利点を生かした効果的な手法を検討していく必要があると考えられる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４件）

① Miyamoto, Y., J. Ito, <u>S. Nishizwa</u>, and H. Tomita, A linear thermal stability analysis of discretized fluid equations, Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 査読有, vol. 29, 2015, pp. 155-169, doi: 10.1007/s00162-015-0345-x

② Sato, Y., Y. Miyamoto, <u>S. Nishizwa</u>, 他 5 名(3 番目), Horizontal distance of each cumulus and cloud broadening distance determine cloud cover, SOLA, 査読有, accepted

③ Sato, Y., <u>S. Nishizawa</u>, 他 3 名(2 番目), Potential of retrieving shallow-cloud life cycle from future generation satellite observations through cloud evolution diagrams: A suggestion from a large eddy simulation, SOLA, 査読有, vol. 10, 2014, pp. 10-14, doi: 10.2151/sola.2014-003

④ 佐藤陽祐, <u>西澤誠也</u> 他 4 名(2 番目), 完全圧縮 LES モデルの開発と層積雲の成長過程に関する計算～雲・エアロゾル科学への計算科学の貢献, 低温科学, 査読有, 72 巻, 2014, pp 265-284, http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/journals/item.php?item=64677&handle=2115_55064&jname=173&vname=5382

〔学会発表〕（計　４件）

① <u>Nishizawa, S.</u>, SCALE introduction, Joint workshop of 6th International Workshop on Global Cloud Resolving Modeling and 3rd International Workshop on Nonhydrostatic Numerical Models, 24-26 Sep 2014, 理化学研究所計算科学研究機構(兵庫県・神戸市)

② Nishizawa, S., 他 10 名(1 番目), High-resolution large-eddy simulation on the Martian planetary layer, AOGS 11th Annual Meeting, 28 Jul – 1 Aug 2014, ロイトン札幌(北海道・札幌)

③ 西澤誠也 他 4 名(1 番目), 高解像度重力流実験でみられる不安定のフラクタル構造とそれによる混合, 気象学会 2013 年春季大会, 2013 年 5 月 15-18 日, オリンピック記念青少年総合センター(東京都)

④ 西澤誠也 小高正嗣 他 9 名(1 番目), 火星境界層の高解像度 LES 実験, 第 46 回月・惑星シンポジウム, 2013 年 8 月 5-7 日, 宇宙科学研究所(神奈川県・相模原市)

６．研究組織

(1)研究代表者

西澤 誠也（NISHIZAWA, Seiya）
理化学研究所・計算科学研究機構・研究員
研究者番号：40447892