様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：１５１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2015
課題番号：２３７６０８０５

研究課題名（和文）核融合プラズマにおける境界層問題の新しい接続解法の開発

研究課題名（英文）Development of new matching method for boundary-layer problem in fusion plasmas

研究代表者
古川　勝（Furukawa, Masaru）

鳥取大学・工学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：８０３６０４２８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では，磁化プラズマの抵抗性磁気流体力学的（MHD）安定性問題の新解法を構築し発展させた．本方法は，従来の代表的解法の1つであった漸近接続法（境界層理論）が適用不可能または現実的に困難な状況にも適用可能である．具体的には，当該研究者等の先行研究を発展させ，(1) 軸対称トロイダルプラズマの線形安定性，(2) 円柱プラズマだが弱く非線形な時間発展を解く方法を共に定式化し，コード開発も行った．他に，有限Larmor半径効果を含めたモデルへの拡張，接続解法の外部解として用いることができる理想MHDモデルの定常解を非正準Hamilton力学系の理論を応用して求める方法の研究も行った．

研究成果の概要（英文）：We have developed and extended a new solution method for resistive MagnetoHydroDynamics (MHD) stability problems in magnetized plasmas. The new matching method is applicable to situations where the matched asymptotic expansion (boundary-layer theory), one of the conventional solution methods, cannot apply or is difficult to apply actually. We have extended our previous studies on the new method to (1) stability problem of axisymmetric toroidal plasmas and (2) weakly nonlinear evolution of cylindrical plasmas. We have not only formulated the theory but also developed the numerical codes. Furthermore, we have extended the method for applying a model including finite Larmor radius effects. We have also studied a solution method for stationary states of ideal MHD, which is used for outer solution of the new matching method, on the basis of the noncanonical Hamiltonian theory.

研究分野：プラズマ物理学

キーワード：プラズマ・核融合　境界層　数理物理　特異摂動　波動

１．研究開始当初の背景
核融合プラズマの運転パラメータ領域を決める大きな要因の一つである磁気流体力学（MagnetoHydroDynamics, MHD）安定性を正確かつ高速に評価することは，核融合開発にとって大変重要である．本研究では，プラズマの電気抵抗が有限であることによって生じるクラスの抵抗性 MHD 不安定性の解析に焦点がある．
抵抗性 MHD 安定性問題は，数学的には特異摂動問題で，従来その安定性解析には接合漸近展開（境界層理論）が用いられてきた．その理論は確立されたものではあるが，現実的には数値計算を併用して安定性を評価することがほとんどであり，極限・無限を扱う漸近展開と数値計算の相性が悪く，本質的に改善すべき点が残されていた．
この状況を踏まえ，我々は，逆転の発想で，極限・無限を数値計算で扱わずに済み，しかし数値計算コストは軽減できる，新しい接続解法，すなわち数値接続解法を開発してきた．これまでに，円柱プラズマにおける抵抗性 MHD の線形安定性を正確かつ高速に評価できることを実証してきた．
しかし，現在開発が進められている核融合装置のプラズマはトロイダル形状である．また，実験では，線形不安定となったのち増幅し，非線形性が効き始めて飽和する場合も多い．したがって，数値接続法をトロイダルプラズマに適用し，また非線形な時間発展も追える方法に拡張することは，核融合開発にとって大変重要であった．

２．研究の目的
上述の理由から，本研究課題では，我々が開発してきた数値接続解法を
(1) 軸対称トロイダルプラズマの線形安定性解析に適用できるよう理論を拡張し，コード開発も行って安定性を評価してみせること，
(2) 弱く非線形な時間発展にも適用できるよう理論を拡張し，コード開発も行って数値計算をしてみせること
を研究目的とした．

３．研究の方法
上述の研究目的を達成するために必要な方法を説明する前に，まず接合漸近展開による方法およびその困難について概略を説明し，続いて数値接続法について説明する．
抵抗性 MHD 安定性問題では，磁気面上の磁力線の向きと，安定性を調べたい波の波数が直交する有理面が重要となる．この場所では，波が立つ際に磁力線を曲げずに済むため，少しのエネルギーでもプラズマを変位させ波を増幅しやすい．このような場所では，高温プラズマでは通常は非常に小さく無視できる電気抵抗の効果や，臨界安定付近の低周波揺動の慣性も相対的に効くこととなる．これらが効く有理面周りの非常に薄い層状領域を抵抗層と呼ぶ．従来の接合漸近展開では，この抵抗層（内部層ともいう）内の方程式を，層が無限に薄い極限を取ることで簡約して解き，一方で抵抗層外（外部領域）では電気抵抗と慣性を無視することで簡約した方程式を解いて，その外部解が有理面に近づく極限で内部解と漸近的に接続する条件を求めることで，波の分散関係を得る．しかし，前述の通り，この方法は極限や無限を扱うものであるため，数値計算との相性が悪い．
我々が開発した数値接続法では，この困難を除去するために，内部層を有限幅にする（内部領域と呼ぶ）．また，内部領域と外部領域の解は，漸近的に接続できないので，直接的に接続する．内部領域では電気抵抗と慣性を含めた方程式，外部領域ではそれらを落とした方程式を解くことになるが，実はこれらは微分方程式の階数が異なる．したがって，独立解の数も異なり，内部領域と外部領域の解を直接的に接続するための境界条件が自明ではない．我々は，内部領域から外部領域に近づくにつれて磁力線方向の電場が滑らかにゼロに近づいていくという境界条件を課すことで，円柱プラズマの抵抗性 MHD 問題に関して正しく分散関係を得ることに成功した．
以上が数値接続法に関する先行研究の説明である．本研究課題では，この数値接続法を拡張し研究目的を達成するために，以下の方法で研究を進めた．
(1) 円柱プラズマの場合，通常，電気抵抗の効果が重要となる場所は単一の有理面周りの抵抗層のみである．しかし，トロイダルプラズマの場合，軸対称であっても基本的に 2 次元問題であり，ポロイダル方向の Fourier モードはそれぞれ独立ではなくなる．したがって，複数の Fourier モードの波数に対してそれぞれ有理面が存在し，それらの境界層での内部解と，異なる有理面間に挟まれた領域での外部解を境界条件でつなぎ，分散関係を得る形になる．これを実現するために以下のような方法で研究を進めた：
① 複数の Fourier モードを含めて抵抗性 MHD 方程式を書き下す．
② 内部領域，外部領域のそれぞれで，モード間結合した方程式を境界値問題として定式化し，その解として各領域の Green 関数を定義する．
③ MHD 方程式に含まれる変数のうち，小半径方向の境界条件が必要な変数について，Green 関数の振幅および小半径方向微分が領域間の境界で連続となる条件を書き下す．
④ 上記①-③を数値計算コードに実装する．固有値は，ある初期推測値から始めて③の条件を満たすよう収束させて求める．
(2)　本研究で弱く非線形とは，内部領域では電気抵抗，慣性に加えて非線形効果が効くが，外部領域は依然として線形近似が良い状況を意味している．非線形問題なので，線形安定性のときのような固有値問題でなく，時

間発展を追う形で定式化する必要がある．これを実現するために，以下のような方法で研究を進めた：
① 外部領域については，先行研究と同じ境界値問題を解いて Green 関数を求める．
② 内部領域では，まず，Euler 法で発展方程式を離散化する．次に，未知変数（新しい時刻の解）を，内部領域の同次解（Green 関数と同じ）および既知変数（現在の解）から計算した非線形項を考慮した非同次解の和として表現する．
③ 外部解と内部解の振幅および小半径方向微分が連続となる条件から，未知変数を求める．
④ 上記①-③を数値計算コードに実装する．

４．研究成果
まず，研究目的(1)，(2)については，それぞれコード開発まで行い，学会発表を行った．当初研究目的を達成したと考えている．
研究目的(1)では，研究方法のところで説明した通りに理論を拡張し，数値計算コード NUMATCH（NUmerical MATCHing method in axisymmetric toroidal geometry）を開発した．一方で，研究を進める上で当初予想していなかったことが分かったことも事実であった．それは，計算コストの問題である．当初，外部領域では階数の低い微分方程式を解くだけでよいので，計算コストを減らすことができ，高速な安定性評価を行える目論見であった．ところが，実際には，固有値を初期推測値から収束させる過程で，内部解の Green 関数を何度も求める必要があり，この部分がネックとなって高速な安定性計算とは言えない状況に止まった．また，内部解の Green 関数を求める際には多変数の連立方程式を解く必要があるが，この解の精度が十分に確保できなければ，固有値が求められない状況に陥ることも分かった．これらは今後の改善課題となっている．
研究目的(2)については，研究方法のところで述べたように理論を拡張し，数値計算コードの開発も行った．そして，磁気島を生成する不安定性の弱く非線形な時間発展を，本研究課題で拡張した数値接続法と，領域全体を数値シミュレーションしてしまう方法とで解いて比較し，良い一致を得た．この結果を図 1 に示す．図 1 には磁気島に対応する Fourier モードの磁気エネルギーの時間発展を示している．”num. match.”と書いてあるのが数値接続法で，Δr が内部領域の幅である．”full”と書いてるのは領域全体で数値シミュレーションした場合，”m/n=0/0 suppressed”は平衡成分の時間変化は落としたことを意味している．数値接続法で求めた結果は，それを用いずに解いた場合と良く一致している．Δr=0.2 のとき，終盤にずれが生じているのは，外部領域の線形近似が破れてきたからである．現に，Δr=0.4 の方は依然として良く一致している．計算コストも削減

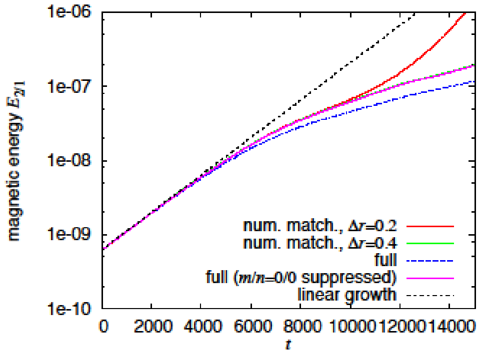

図１：　弱く非線形な時間発展を扱えるよう拡張した数値接続法によるシミュレーション結果．初期に抵抗性 MHD 不安定性が成長し，弱く非線形な状態になる．数値接続法を用いずにシミュレーションした場合との良い一致が確認できる．

された．
さらに，本研究課題では，研究を進めるうちに当初研究目的とはしていなかったことの重要性に気付き，研究を進めた部分もある．それを以下に列挙する．
(3) 国際的には，MHD を拡張したモデルを用いたプラズマ安定性研究も精力的に進められている．その一つは反磁性効果の導入である．これを含めるとモードは単に増幅するだけでなくある周波数をもって回転する．この反磁性効果を内部領域で取り入れ，円柱プラズマではあるが線形安定性を正確に求めることに成功している．本研究も論文に発表している．
(4) 外部領域では，MHD 方程式から電気抵抗のみならず慣性も落とした方程式を解く．つまり，定常解を求めている．MHD の定常解の研究の歴史は古く，理論として確立されている部分も多いが，幾つかの非常に難しい問題は解決されず残されたままである．それは，プラズマ流がある定常状態と，3 次元性をもつプラズマの定常状態の問題である．前者では，2 次元的な定常状態であっても，その支配方程式が容易に解ける楕円型ではなくなる場合がある．後者では，軸対称性がなくなることで磁気面の存在が保証されなくなるため，磁力線がカオス的になった定常状態もあり得る．我々は，これらの問題を解くため，非正準 Hamilton 力学系の理論を応用し，プラズマの定常状態を求める数値計算コードを開発した．現在は，まだ 2 次元矩形領域で，また低ベータ簡約化 MHD モデルを用いて原理実証を行った段階であるが，今後大いに発展させていく予定である．本研究成果も論文発表を行った．
(5) 研究目的(1)でトロイダルプラズマの安定性解析を行ったが，その比較相手として，数値接続法を用いずに安定性計算を行う必要があった．そのため，プラズマの全領域で線形化した抵抗性 MHD 方程式を固有値問題として解くコード ERMHDT（Eigenvalue code for

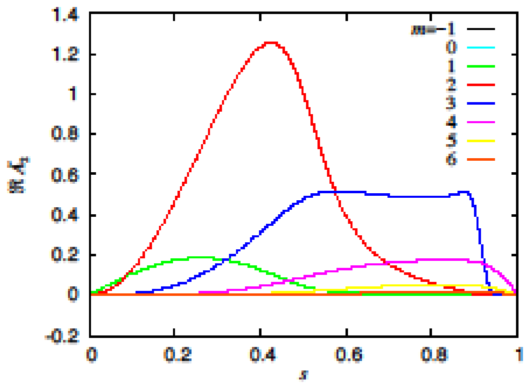

図 2： プラズマ全域で線形化した抵抗性 MHD 方程式を固有値問題として解くコード ERMHDT によるテアリングモードの固有関数の例．ベクトルポテンシャルのポロイダル成分を Fourier 級数展開した係数．横軸は小半径．

Resistive MHD in Toroidal geometry）を開発した．前述の通り，数値接続法による NUMATCH コードよりも ERMHDT コードの方が計算が遅いと予想していたが，高速な固有値計算ライブラリの開発が進んでいることもあり，思ったほど計算時間は掛からないことがわかった．図 2 に，ERMHDT で計算した，大アスペクト比円形断面トカマクプラズマにおけるテアリングモード固有関数の例を示す．ベクトルポテンシャルのポロイダル成分を Fourier 級数展開した係数を，小半径の関数として示している．ERMHDT は，現在，プラズマのトロイダル回転を含める方向で拡張を進めている．その次には，固有値問題でなく境界値問題を解く形に改造し，不整磁場や外的に与える磁場摂動に対する抵抗性 MHD 応答を計算する予定である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Y. Chikasue and M. Furukawa, "Adjustment of vorticity fields with specified values of Casimir invariants as initial condition for simulated annealing of an incompressible, ideal neutral fluid and its MHD in two dimensions", Journal of Fluid Mechanics vol. 775, 2015, pp. 443--459，査読有．

② Y. Chikasue and M. Furukawa, "Simulated annealing applied to two-dimensional low-beta reduced magnetohydrodynamics", Physics of Plasmas vol. 22, 2015, pp. 022511-1--10，査読有．

③ M. Furukawa and S. Tokuda, "Inclusion of diamagnetic drift effect in the matching method using finite-width inner region for stability analysis of magnetohydrodynamic modes", Physics of Plasmas vol. 19, 2012, pp. 102511-1--8，査読有．

〔学会発表〕（計 19 件）

① 古川勝，"抵抗性 MHD の初期値問題に対する有限幅内部領域を用いた 数値接続解法：弱く非線形な場合への拡張"，日本物理学会第 71 回年次大会, 19pAD-1(東北学院大学 泉キャンパス（宮城県仙台市），2016 年 3 月 19-22 日)．

② 古川勝，"トロイダル磁場配位における抵抗性 MHD 安定性解析"，第 32 回プラズマ・核融合学会年会，26aE02P（名古屋大学 東山キャンパス（愛知県名古屋市），2015 年 11 月 24-27 日)．

③ 古川勝，近末吉人， "2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリングシミュレーションにおける Casimir 不変量の調整"，日本物理学会 2015 年秋季大会，17aCW-9（関西大学 千里山キャンパス（大阪府吹田市），2015 年 9 月 16-19 日)．

④ Y. Chikasue and M. Furukawa, "Simulated Annealing for stationary states of 2D low-beta reduced MHD", 11th Asia Pacific Plasma Theory Conference and Japan-Korea Workshop on “Modeling and Simulation of Magnetic Fusion Plasmas”, P31 (Jul. 1-4, Jeju Island, Korea).

⑤ M. Furukawa, Y. Chikasue, "Numerical computation of stationary state of 2D reducedMHD on Casimir leaf", International Conference on Geometrical Algorithms and Methods for Plasma Physics, (May 13-15, Hefei, China).

⑥ 近末吉人，古川勝，"2 次元低β簡約化 MHD の定常状態のアニーリングシミュレーション"，日本物理学会 第 69 回年次大会，27pAE-10（東海大学 湘南キャンパス（神奈川県平塚市)， 2014 年 3 月 27-30 日)．

⑦ 古川勝，"有限 Larmor 半径効果を含めた MHD モード安定性の接続解法の収束特性"，日本物理学会 2012 年秋季大会，19aFA-3（横浜国立大学 常盤台キャンパス（神奈川県横浜市)， 2012 年 9 月 18-21 日)．

⑧ 古川勝，"有限 Larmor 半径効果を含む簡約化 MHD モデルに対する新しい接続解法の開発"，日本物理学会第 67 回年次大会, 24aYG-1（関西学院大学 西宮上ケ原キャンパス（兵庫県西宮市)， 2012 年 3 月 24-27 日)．

６．研究組織

(1)研究代表者

古川 勝（FURUKAWA, Masaru）
鳥取大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号： 80360428