様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　5 月 24 日現在

機関番号：11301
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2011 ～ 2012
課題番号：23840003
研究課題名（和文）　導来淡中理論の研究

研究課題名（英文）　Toward Derived Tannaka duality

研究代表者
岩成　勇（IWANARI ISAMU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70532547

研究成果の概要（和文）：23 年度と 24 年度中に高次圏における淡中化という高次圏から、導群群スキームやプロ代数群を構成する便利な構成法を得た。それを混合モチーフの圏と実現関手に応用しモチーフ的ガロア群というべきものを構成した。構成したあと棒構成との関係を研究し、旧来知られていたテートモチーフの Galois 群と関係付けた。さらにより精密な高次圏の淡中型定理を構成し、一般の場合のモチーフ的 Galois 群の構造を研究する手法を開発した。それを用いて実際テートモチーフの場合を超えて（混合楕円等の）より大きな圏の Galois 群の構造を研究した。

研究成果の概要（英文）：In 2011-2012, we obtained several results concerning tannaka duality type theorems towards applications to mixed motives. Some results are purely categorical and derived algebraid theoretic, and others are about motives. One algebraic powerful machinery I constructed is tannakization in the realm of derived algebraic geometry. Applying it to motivic situations we constructed derived and underived motivic Galois groups. Moreover, I found a refined tannaka duality type theorem which are well-suited to motivic applications and studied the structure of motivic Galois groups for the cases where one cannot use techniques in mixed Tate motives .

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：導来代数幾何、双対性、ホモトピー、高次圏、モチーフ

１．研究開始当初の背景

淡中双対性（Tannaka duality）とは、ある意味ポントリャーギン双対性の非可換への拡張とみなせ、代数群 G は G のすべての有限次元表現のなす対称モノイダル（テンソル）圏から復元できることを主張する（Tannaka, Krein, Saavedra, Deligne,..）。すなわち、代数群とそのの線形表現のなすテンソル圏の等価性が成り立つことを主張する。私は福山氏との共著論文"Monoidal Infinity category of complexes from Tannakian viewpoint"において淡中双対の考え方を高次圏的な枠組みのなかで考えることによって、スキームやDeligne-Mumfordスタックにおいても淡中双対性の類似が成り立つことを示した。これはある意味「高次淡中双対性」と思え、高次の（安定な）テンソル圏とスキームや（高次）スタックなどといった幾何の双対性を表していると言える。このような考え方と手法は Quillen や Sullivan の有理ホモトピー論（ドラームホモトピー論）の Toen らによる最近の発展・拡張にも現れていて、そこにおいては schematic homotopy type や tannakian dg-category といった概念を介してホモトピー版淡中双対というべきものが構成されている。これらは大雑把にいって、スキーム、スタック、位相空間 と「関数」（準連接層や接続付きファイバー束）のなすテンソル高次圏の等価性を主張する。これらの一見異なる分野から双対性を通して興味深い類似性は新しい幾何学とその幾何学の暁としての古典的な問題を一新し解決せしめるとの直感のもと理論構築をおこない応用を目指すに至った。基礎となる枠組みとしてジェイコブ・ルーリーによって驚異的なスピードで発展させられた高次圏や導来代数幾何の驚異的な発展などがある。ジョエル、ルーリー、シンプソン、レツクやさらに世界中の新進気鋭の若手研究者により高次圏の研究は目覚しい進歩を遂げており,私が現在応用上つかいたいような事柄の基礎部分はほとんど確立しているような状態になった.具体的な例をとってもそれは明らかである：スキームの準連接層複体は、三角圏をなすけども高次圏やDG圏であつかうほうが自然である。それは、最近の高次圏を用いた導来森田理論等の魅力的かつアグレッシブな発展やホモロジカルミラー対称性などから明らかである。高次の淡中理論もそのような魅力的な発展が期待できる。

２．研究の目的

これらの古典的な淡中双対やスキームやスタックの淡中双対、有理ホモトピー論における淡中双対などは皆ひとつの（高次圏論的枠組で昇華された）高次淡中双対性としてできるのではないかという考えのもと、その理論の構成とそれから帰結されるはずの応用に取り組んでいる。Grothendieck が SGA1 においてガロア理論や基本群の理論を統一した Galois category の理論を展開したことを踏まえれば、淡中双対性の統一は重要である。というのも Galois category の理論は例えばエタール基本群という新しい不変量を生みだしたが、高次淡中双対性はテンソル付き高次圏から新しい不変量を生むことが期待される。実際、私の「高次淡中双対性」を構築するひとつの大きな動機として、混合モチーフ、スキームやスタックのの復元問題、有理ホモトピー論などに応用可能なかたちで高次圏において淡中双対理論やその変種を構成し応用を目指している。また、理論的側面と応用的側面双方を視座にいれ研究する。それぞれ応用的側面から説明すると、スキームやスタックの復元問題とは、古典的な準連接層アーベル圏からのスキームらの復元の三角圏あるいはもっと正確には高次圏への拡張である。導来代数幾何を視野に入れた時アーベル圏というのはあまり意味がない。実際アーベル圏と高次安定圏の関係は、アーベル群とチェイン複体の関係の一般化と思え、高次ホモトピーや導来変形のデータを表すにはアーベル圏では不足しているのである。高次の双対性を考えると自然に（一般的な）復元が得られ、それを有理ホモトピー論などと関係付けるのが目標である。混合モチーフのアーベル圏はいまだ見果てぬ夢であるが、混合モチーフのDG圏、擬DG圏、モデル圏、三角圏は構成されている（ボェボドスキー、花村、リヴィン、シシンスキーデグリス、ベイリンソンら)。実際期待される T 構造が存在した場合その心（ハート）がアーベル圏になる。一方でこのアーベル圏から三角圏を復元することは出来ない。従って DG 圏、モデル圏らのほうが、アーベル圏より混合モチーフが住む圏として自然なのである（実際、拡大類が対象になるわけである)。一方でアーベル圏が存在しなければ、従来の考えではモチーフ的ガロア群は構成されずモチーフレベルのガロア理論は展開できなかった。実際できているのは混合テートモチーフの場合くらいでその場合はアーベル圏が構成できているのであった。ここでの私の新しい考え方は、混合モチーフのテンソル付き DG 圏や高次圏（∞圏）自体を高次淡中圏と捉え、高次淡中理論を構築することによりモチーフ的ガロア理論にアタックすることである。脱構築しテートモチーフの場合をはるかに超えた応用を与えることが目標である。また、汎用な高次淡中理論を構築することにより非可換モチーフなどの場合への応用を目指している。非可換モチーフにおいては非可換空間における周期の発見が興味ふかい目標である。つまり非可換モチーフに対して周期を定義し意味のある（非可換グロタンディーク周期予想のような）予想を建てたい。スキーマティックホモトピータイプとの関連を考えると非アーベルなモチーフ（非アーベルホッジ理論などに実現がある）の構成を視座に入れることも重要な目標である。非アーベルなモチーフの枠組みはおそらく半安定ベクトル束のモジュライ空間を半安定モチビック層に変える必要であるがその生成系と関

係式がなんであるかは基本的な問題である この方向で非アーベルホッジ理論などと関係付けれるものを発見するのも目的の一つである。目的のいくつかのポイントをいつくか箇条書きであげる。①テンソル付き高次圏が与えられたとき commutative ring spectra 上の層を定義することができるが，その層がいつ代数的な構造をもつかという問題：圏論的特徴付け. 特にその層が gerbe と言う構造を持つ条件の求めること. この問題については、アーベル圏と安定高次圏の違いから生ずる、興味深い問題がいくつか横たわっている.②Tannakization の一般化精密化，tannakization という構成の基本的な性質の研究. 淡中化の方法は「基点付」高次圏ならなんでも不変量として導来 affine 群スキームを output するがその群をいうのは（普遍性を持つとか特殊な場合はBar構成になっているとかいった事以外）どういう構造になっているか分からない(Grothendieck のガロア理論で絶対ガロア群を構成してもその構造はよくわからないのと同じ事情である）. 大雑把でもいいからそれをある程度わかるようになりたい.例えば，tannakization をBar 構成で得られる（導来）群スキームの極限でかくことが出来るのではないか？や，SGA1 にある基本群の specialization の類似の構成の問題を考えている. ③「導来群スキーム」の理論の整備. 代数群や群スキームを To¥"en や Lurie らによる導来代数幾何の枠組みでの自然な一般化として導来群スキームをいう概念を得るが，その概念が高次淡中双対性ではひとつの中心的な概念になるのでその理論を構築する. 例えば tangent space に対応する概念である tangent complex は dg Lie algebra であるが，それと導来群スキームの関係等は知りたい.また欲をいえば building block でかけるような構造定理が欲しい. ④ QuillenやSullivanの有理ホモトピー論と Thomason や Balmer（＋我々）のスキームやスタックの復元定理を単なる類似ではなく,統一する正確な定式化を予想として得ているがこれを証明したい. これには位相空間上の完全複体の圏の解析が必要である.⑤ Bar 構成で構成される、あるいはされるであろう比較的「小さい」圏 Tateモチーフの(Bloch-Kriz, Kriz-May,..)、楕円モチーフなどのすでに構成されている或いはされつつある Galois 群と tannakization で(例えば混合 Tate モチーフの圏から）構成されるものの比較. また私が構成した motivic Galois 群とより構造の分かっている群との関係、各種予想との関係、もっと明示的なものへの非自明な作用を作ること.

３．研究の方法

ルーリーやトーエンが進展させた導来代数幾何と高次圏の技術がひとつ大きな土台になる。そのレベルに行かないと実現関手の自己同型群の表現性などが成立しないことがひとつの原因である。現在、ジョエル、ルーリー、シンプソン、レツクやさらに世界中の新進気鋭の若手研究者により高次圏の研究は目覚しい進歩を遂げており,私が現在応用上つかいたいような事柄の基礎部分はほとんど確立しているような状態になった.具体的な例をとってもそれは明らかである：スキームの準連接層複体は、三角圏をなすけども高次圏やDG圏であつかうほうが自然である。それは、最近の高次圏を用いた導来森田理論等の魅力的かつアグレッシブな発展やホモロジカルミラー対称性などから明らかであり、また（蛇足であるが）私が進めている導来淡中理論をすすめるに至っている。 他の例として混合モチーフ（ほか非可換モチーフ）の構成における（黎明期から）構成においてホモトピーコヒーレンスをどうやって考慮に入れるかというのは重要なポイントの一つであった。従って、ファイバーファンクターの自己同型の表現性を使って多くの構成を処理するという技術的な側面からも必要な枠組みである.その高次の射の情報を忘れ去った三角圏では、不十分である。いくつか勉強会やセミナー、研究集会を開いたりして他の研究者と新しい結果を議論する場をもうけた。また研究の方法は、一口には言いにくいけれども代数幾何、圏論、数論、表現論等の多角的な考察によって行っている。例えば技術的に表現性は、ホッジ理論やガロア表現の結果を効果的に応用するためにも極めて重要なことである。他方で、古典群の表現論は、応用上関手の構成に非常に有効である。すなわち、応用においては、構成した理論とともに表現論でも数論の結果でも使えるものはなんでも使うといったアバンギャルドな面もだして研究している。

４．研究成果

23 年度 24 年度中に高次圏から導来群スキームやプロ代数群を構成する便利な構成法を得た。これを淡中化と呼んでいる。これは非常に広範に応用できる構成である。その過程で導来代数群の基礎も研究した。淡中化を混合モチーフの圏と実現関手に応用しすべての混合モチーフに対してモチーフ的ガロア群というべきものを構成した. これはとくに実現関手を表現するプロ代数群になっている。構成したあと棒構成との関係を研究し

淡中化が棒構成を含んでいることを示した。含んでいるというのは曖昧な書き方であるが、同変的アファイン導来スキーム上のパーフェクト複体の圏の淡中化が同変棒構成に対応していることを示したものである。それを用いて、以前よりブロックらにより構成されていた混合テートモチーフのガロア群は混合テートモチーフの高次圏の淡中化により得られるプロ代数群と一致することが示した。しかしながら我々の目標はテートモチーフなどの古典的な技術が適用できる場合を超えてより大きなモチーフの圏に対してよいふかい理解と応用を目材している。この目標のため棒構成と高次圏、導来森田理論の関係にヒントを得たより精密な淡中型定理を示した。この淡中型定理は、実用上非常に便利な条件により具体的に圏の形を特定できる。さらに棒構成との相性がよい。実際この手法と結果を用いて混合楕円モチーフの圏を目標に書いた混合モチーフの三角圏の部分三角圏として定義して、その明示的な構造の表現定理を与えた。さらにこれの一般化を模索しいくつか結果を得た。さらにこれを用いてこの場合のモチーフ的ガロア群の構造を研究した。実際開発した手法が効果的に使えることがわかり構造に対して予想されていたことが示せることがわかった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
①H. Fukuyama and I. Iwanari,
Monoidal infinity category of complexes from tannakian viewpoint, Mathematische Annalen, June 2013, Volume 356, issue 2, pp 519-553.
http://link.springer.com/journal/208/356/2/page/1

〔学会発表〕（計 7 件）
①岩成勇、``deriving motivic Galois theory”中央大代数研究集会、2013 年 1 月 23 日、中央大
②岩成勇、``導来代数幾何とモチーフ的ガロア群”、代数幾何セミナー、2012 年 11 月 2 日、東北大
③岩成勇、``導来淡中双対とモチーフ”、HAG セミナー、2012 年 7 月 4 日、名古屋大
④岩成勇、``淡中化とモチーフ”、代数幾何とモチーフ、2012 年 3 月 8 日、東北大
⑤岩成勇、``スキーム、有理ホモトピー論、導来代数幾何”、空間の代数的幾何的モデルとその周辺、2011 年 9 月 8 日京都大
⑥岩成勇，''derived gerbe, tannaka duality, and motives”、佐渡代数幾何シンポジウム、2011 年 6 月 4 日、佐渡
⑦岩成勇，``スタック上の安定性”東北大学談話会、2011 年 5 月 15 日、東北大

６．研究組織
(1)研究代表者
岩成　勇（IWANARI ISAMU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 70532547

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：