様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 10 日現在

機関番号：12601
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2011 ～ 2012
課題番号：23840006
研究課題名（和文） p進コホモロジーとラングランズ対応

研究課題名（英文） p-adic cohomology and Langlands' correspondence

研究代表者
阿部知行（ABE TOMOYUKI）
東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・特任助教
研究者番号：70609289

研究成果の概要（和文）：
本研究ではp進コホモロジー論の基礎理論の構築を主眼として行った．まず，フロベニウス作用を見れば p 進微分方程式が復元できるというチェボタレフ稠密性定理を証明し，p 進コホモロジー論における重さの理論，及び交叉コホモロジーの純性定理を証明した．これらの結果はp進コホモロジー論とl進コホモロジー論が本質的には同じ情報を持っているというドリーニュによる小同志予想に対する応用を期待している．

研究成果の概要（英文）：
In this work, I tried to construct a foundational theory of p-adic cohomology. First, I proved the Cebotarev density type theorem, which states that we can retrieve p-adic differential equation when we look at the Frobenius action, and established the theory of weights in p-adic cohomology theorem as well as the purity for the intersection cohomology. These results are expected to be applied to the "petits camarades conjecture" by Deligne claiming that the p-adic and l-adic cohomology theories have essentially the same information.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2011 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2012 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：代数，数論幾何学
キーワード：p進コホモロジー，D加群，ラングランズ対応

１．研究開始当初の背景

(1) 数論幾何学はヴェイユが 50 年代に代数多様体のL関数に関する一連の美しい予想（ヴェイユ予想）を提出するところから始まる．この一連の予想は 50～70 年代の数論における中心的な問題であった．ヴェイユ予想の解決は良いコホモロジー論を構成することにあった．実際，始めてのヴェイユ予想の部分結果はドゥウォークによるもので，p 進コホモロジーを用いて示された．その後グロタンディー

クにより l 進コホモロジー理論の基礎理論が急速に整備され，リーマン予想の類似を除くヴェイユ予想が解かれることになる．この業績によりグロタンディークはフィールズ賞を受賞する．このグロタンディークの仕事をさらに推し進め，70 年代にドリーニュがついにリーマン予想の類似を証明し，ヴェイユ予想が完全に解決されることになる．ドリーニュもこの業績によりフィールズ賞を受賞した．

(2) ヴェイユ予想は解決されるが，副産物として全ての素数に対して別々のコホモロジー論が作られ，それらの間の関係が問題となる．ドリンフェルトの結果に触発され，ドリーニュはこれらのコホモロジーの間の関係を予想した．

(3) l が始めに固定した素数 p と異なる場合に関してはラフォルグが 2000 年頃に証明し，その功績によりフィールズ賞に輝いている．残るは p 進コホモロジーの部分である．本報告書では，ドリーニュの予想の記述に従って，予想を“小同志予想”と呼ぶことにする．

２．研究の目的

小同志予想は１．でも述べたようにドリーニュによって予想された p 進コホモロジーの深遠な性質に関する予想である．この予想を解決するためには p 進コホモロジー論の基礎理論を完成させる必要があると思われており，本研究では小同志予想を解決するための基礎的な理論を構築することを目的としている．p 進コホモロジー論は l 進コホモロジー論と異なり，様々な基本的な研究が遅れており，小同志予想の解決のための障害となっている．具体的には局所的なフロベニウス作用を見れば，全体が決定するというチェボタレフ稠密性定理，重さの理論の構築，スタックのコホモロジー論の構築，等の理論は未完成である．本研究ではできる限りこれらの理論を作ることである．
一方で，重さの理論などは小同志予想への応用に限らず重要な理論である．重さの理論は代数的な“モチーフ”から生じているコホモロジー論においては存在すべき物であり，ラングランズ対応が存在している強力な証拠であるのみならず，様々な p 進微分方程式の構成に用いられるべき物である．そのために重さの理論や，交叉コホモロジーの純性定理を証明することも大きな目的である．

３．研究の方法

p 進コホモロジー論は構成がきわめて複雑で，10 年ほど前まで絶対コホモロジー論はある程度の基礎理論が構築されたものの，その変動理論である数論的 D 加群の理論は，有限性を中心に，十分に整っていない状況であった．ところが，数年前，ケドラヤが準安定還元定理を示すことがきっかけとなり，有限性の問題がほぼ解決され，大きく理論が発展することになった．理論が整備されつつあるにもかかわらず，その基礎理論の難しさから，数論的 D 加群に関わっている研究者は世界的に見てもまだ少ない．

本研究は数論的 D 加群を中心的な道具として小同志予想に関わる基礎理論を構築する．数論的 D 加群は l 進コホモロジー論における“6 つの関手の理論”に対応する物で，柔軟なコホモロジー的な操作を可能にする．一方で p 進理論においては構成が複雑なため，技術的な困難が多くつきまとう．たとえば，構成が l 進コホモロジー論のように幾何学的でないため，基本群の表現の形で書くことができず，例えば l 進コホモロジーでは有限エタール被覆で引き戻しすれば分岐を馴にすることができるが，p 進理論ではこれはきわめて深い結果であり，準安定還元定理の主張である．このように，l 進コホモロジー論と並行に進む部分と進まない部分があるので，本質を見極めることが重要である．

４．研究成果

(1) チェボタレフ稠密性定理：
古典的なチェボタレフ稠密性定理は有限体上の曲線の基本群の中に各点のフロベニウス置換が稠密に入っているというものである．p 進コホモロジーにおいて同様のことを示そうと思うと，一番に問題になってくるのは p 進係数理論が普通の基本群の表現に対応していないということである．そこでアイソクリスタルの基本群を用いることになるが，この基本群はあくまでも代数群であり古典的な議論は一見すると行えない．今回はクルーやドリーニュによる結果を用いることにより，アイソクリスタルの基本群から普通の群を取り出し，p 進のチェボタレフ稠密性定理をある条件付きで導出した．この条件は小同志予想で用いるには強すぎる物ではないと思われ，また，小同志予想が肯定的に解ければ外すことができる．

(2) 重さの理論の構築：
重さの理論は代数多様体上の係数理論固有の理論であり，それらの深い構造を反映して

いる物とされる．これらの例にはホッジ理論とエタール・コホモロジー論が知られている．重さの理論が初めて構築されたのはドリーニュによるヴェイユ予想の解決においてであり，ヴェイユ予想のリーマン予想の類似において垣間見える物である．もし，ラングランズ対応が存在しているのであれば，l 進コホモロジーにおける重さの理論がｐ進コホモロジーにも移行できるはずであり，当然期待される物であった．p 進の絶対コホモロジーにおいてはケドラヤによる Weil II 類似がすでにあり，本研究はこれを一般化した物である．

具体的には，まずｐ進係数に対して重さの概念を定義し，多様体間の射があったとき，コホモロジー作用で重さが期待されるように保存されていることを示すことに成功した．これはD. Caro 氏との共同研究である．

(3) 交叉コホモロジーの定義と純性：
表現等の構成問題において，交叉コホモロジー論はきわめて重要な役割を果たしている．小同志予想を解決するためにも中心的な役割を果たす物と期待される．重さの理論の構築の続きとして，交叉理論を定義し，その純性も示すことができた．

交叉コホモロジーはｌ進コホモロジーにおいては偏屈層の理論を用いて定義される．D 加群は偏屈層に対応しているものと考えられるので，D 加群の枠組みを使う限り構成はとてもシンプルである．問題は純性定理にある．純性定理はｌ進コホモロジーにおいてはガバーによって示された物であり，当初はこの方法を用いる予定であった．しかし，p 進コホモロジーで類似の方法を用いるのはこんなんであることが分かり，フーリエ変換を用いる方法を試し，証明に成功した．簡単な応用として，ある種の l 独立性定理が得られる．これもD. Caro 氏との共同研究である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

(1)T. Abe, Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincar¥'e duality in the theory of arithmetic $¥mathscr{D}$-modules, to appear from Padova journal.

〔学会発表〕（計 11 件）

(1) 2012 年 11 月 19 日
阿部知行，Theory of weights in arithmetic D-modules, Seminar in Strasbourg, France.

(2) 2012 年 11 月 14 日
阿部知行，Theory of weights in arithmetic D-modules, Seminaire de Geometrie Arithmetique in IHES, France.
http://www.ihes.fr/~abbes/SGA/abe2.html

(3)2012 年 11 月 2 日
阿部知行，Frobenius structures in the theory of arithmetic D-modules, p-adic cohomology and its applications to arithmetic geometry, 東北大学.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~tsuzuki/2012p-adic/2012sendai.html

(4)- 2012 年 7 月 24 日
阿部知行，Langlands program for p-adic coefficients and petits camarades conjecture, Pan Asian Number Theory Conference, India (Pune).
http://www.icts.res.in/additional_page/453/

(5) 2012 年 6 月 22 日：
阿部知行，数論的 D 加群と p 進係数の関数体のラングランズについて，数論合同セミナー，京都大学.
http://gcoe.math.kyoto-u.ac.jp/cgi-bin/seminars/index.ja.php?type=view&id=906&ca=seminar

(6) 2012 年 6 月 6 日：
阿部知行，Langlands program for p-adic coefficients and the product formula for epsilon factors, Arithmetic Geometry week in Tokyo, 東京大学.
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito/conf/agwtodai/agwtodai.html

(7) 2012 年 3 月 29 日：
阿部知行，数論的 D 加群とその応用について，日本数学会（招待講演），東京理科大学.

(8) 2012年1月23日：
阿部知行, Langlands program for p-adic coefficients and the petites camarades conjecture, Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives, 東北大学.

(9) 2011年10月7日：
阿部知行, Product formula for p-adic epsilon factors, Univ. Milano (Italy).

(10) 2011年10月6,10日：
阿部知行, Nearby cycles and vanishing cycles, DAGA Seminar, Univ. Padova (Italy).

(11) 2011年6月15日：
阿部知行, Product formula for p-adic epsilon factors, 東京パリ数論幾何セミナー, 東京大学.

〔その他〕
ホームページ等

一般公演：

- 2012年9月8日
阿部知行, 図形から語る数学の世界 ～不思議な3つのラングランズを巡って, 多摩六都科学館.
http://www.tamarokuto.or.jp/modules/roomEntry/index.php?s=eventlist&tpl=list&cat=15#177

６．研究組織
(1)研究代表者
阿部 知行（ABE TOMOYUKI）
東京大学・数物連携宇宙研究機構・特任助教
研究者番号：70609289

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：