

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：12608

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2011～2012

課題番号：23840014

研究課題名（和文） カンドル理論を用いた絡み目ホモトピー類の分類

研究課題名（英文） Study on quandle theory to classifying links up to link-homotopy

研究代表者

井上 歩（INOUE AYUMU）

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・科学研究費教育研究支援員

研究者番号：10610149

研究成果の概要（和文）：絡み目ホモトピーとは、全同位よりも弱い絡み目の同値関係である。カンドルは、全同位による絡み目の分類に有用と考えられている、ある代数系である。本研究の目的は、このカンドルを絡み目ホモトピーによる絡み目の分類に活用することにある。カンドルに準自明性という概念を導入し、準自明カンドルに特有なホモロジーの理論を展開して、数値型絡み目ホモトピー不変量を大量構成した。また、この不変量の分類能力を明確化した。

研究成果の概要（英文）：Link-homotopy gives rise to an equivalence relation on links which is weaker than ambient isotopy. A quandle is an algebraic system which is known to be useful to classifying links up to ambient isotopy. The aim of this study is to utilize quandles to classifying links up to link-homotopy. We introduced the notion of quasi-triviality of quandles, homology theory for quasi-trivial quandles, and obtained a lot of numerical link-homotopy invariants. We further explained the latent ability of those invariants.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2011年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2012年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			0
年度			0
年度			0
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：トポロジー，絡み目，カンドル，絡み目ホモトピー

1. 研究開始当初の背景

N. Habegger と X. S. Lin は、任意の二つの絡み目に対し、これらが絡み目ホモトピー同値であるか否かを判定するアルゴリズムを与えている。これにより、絡み目を絡み目

ホモトピーで分類するという問題は、すでに完結したのだと考えられがちである。しかし、例えば「3成分の絡み目に対し、絡み目ホモトピー類の代表元をすべて列挙せよ」といった問題に、判定アルゴリズムは解を与えない。

なぜならば、“すべての” 3 成分絡み目を列挙することは不可能であり、よって“すべての” 3 成分絡み目に対して判定することは不可能だからである。

一方、3 成分絡み目に対する絡み目ホモトピー類の代表元は、絡み目ホモトピーを定義した J. Milnor 自身により、すでに列挙されている。彼は、今 Milnor 不変量と呼ばれる絡み目ホモトピー不変量を導入し、これを用いて 2 成分および 3 成分の絡み目に対して、絡み目ホモトピー類の代表元をすべて列挙した。後に J. P. Levine が (Milnor 不変量を詳細化することで) 4 成分絡み目の絡み目ホモトピー類をすべて列挙したが、5 成分以上の絡み目に関しては未だに列挙がなされていない。列挙には絡み目ホモトピー不変量が不可欠であるが、(計算可能なものは) Milnor 不変量以外に知られていないという現状がその一因である。

2. 研究の目的

(1) カンドルおよびそのホモロジーを用いて、絡み目の数値型 (全同位) 不変量を大量に構成することができる。この不変量 (カンドルコサイクル不変量と呼ばれる) は、一般に、絡み目ホモトピーで不変ではない。しかし、例えば自明カンドルから得られるカンドルコサイクル不変量は絡み目ホモトピーでも不変であることが知られている。どのようなカンドルを用い、どのようなホモロジーを考えれば、カンドルコサイクル不変量は絡み目ホモトピーで不変となるのだろうか？これを明らかにすることが研究の第一の目的である。

(2) (1)の研究により絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量を構成することができれば、(計算可能な) 数値型の絡み目ホモトピー不変量が大量に手に入ることになる。これらを用いて絡み目ホモトピー類の代表元の列挙に取り組みたい。そのためにはまず、絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量の分類能力を知る必要がある。この研究を第二の目的とする。

3. 研究の方法

(1) 絡み目には、結び目カンドルが定まる。結び目カンドルから固定したカンドル X への表現全体がなす集合は、全同位で不変である。よって、特にその位数は絡み目の数値型 (全同位) 不変量を与える。

結び目カンドルから X への表現は、絡み目図式の X 彩色として組み合わせ的に表すことができる。 X の 2 次元コサイクル θ を選択・固定すると、 X 彩色された絡み目図式に対し、

重みと呼ばれる数値が定まる。すべての表現に対して重みを計算し、その (多重) 集合を考えれば、これはまた絡み目の数値型 (全同位) 不変量である。これを θ から定まるカンドルコサイクル不変量と呼ぶ。

全同位で同値な二つの絡み目の図式は、Reidemeister 変形と呼ばれる図式の変形により互いに移り合う。この変形を施しても、 X 彩色の個数やその重みには変化が生じない。このことが、カンドルコサイクル不変量に、全同位で不変であるという保証を与えている。

絡み目ホモトピー同値な二つの絡み目の図式は、Reidemeister 変形に加え、自己交差交換と呼ばれる変形により互いに移り合う。一般に X 彩色の数は自己交差交換により変化する。ゆえに、カンドルコサイクル不変量は絡み目ホモトピーで不変ではない。ならば、自己交差交換でも X 彩色の数が変化しないようなカンドルを見つければ、カンドルコサイクル不変量を絡み目ホモトピーでも不変にできるだろう。よって、このような性質をもつカンドルの特徴を研究すれば良い。

たとえ自己交差交換で X 彩色の数が変化しなくとも、 θ から定まる重みはまだ変化する可能性がある。そこで、自己交差交換しても重みが変わらないための θ の条件についても研究する必要がある。

上記が達成できれば、絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量が構成でき、よって大量に数値型絡み目ホモトピー不変量を手に入れることができる。

(2) 結び目カンドルの 2 次元ホモロジー群には、(絡み目の各成分に対応して) 基本類が定まる。 X 彩色された絡み目図式の θ による重みとは、対応する表現が誘導する 2 次元ホモロジー群の間の準同型による基本類の像を θ により評価した値に他ならない。よって、カンドルコサイクル不変量の分類能力は、潜在的に、結び目カンドルとその基本類の分類能力に依存している。

結び目カンドルは、絡み目ホモトピー不変ではない。しかし J. R. Hughes (および研究代表者) が与えられた、結び目カンドルの商、簡約結び目カンドルは、絡み目ホモトピーで不変である。(1)の方法で得られた絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量を上記のようにホモロジー論で解釈するには、簡約結び目カンドルに定まる基本類を利用すれば良い。

簡約結び目カンドルとその基本類の分類能力を研究することにより、(1)の方法で得られた絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量の潜在的な分類能力を研究する。

4. 研究成果

(1) 自己交差交換を施しても X 彩色の数が変化しないようなカンドルに、代数的な特徴を見いだした。しかし、このカンドル (準自明カンドルと命名) の 2 次元コサイクルを用いても、一般に X 彩色の重みは自己交差で変化してしまう。そこで、自己交差交換を施しても重みが変わらないような 2 次元コサイクルの条件を抽出し、そのようなもののみが 2 次元コサイクルとなるような、準自明カンドルに特有のホモロジー (準自明カンドルホモロジーと命名) を構成した。結論として、絡み目ホモトピーで不変なカンドルコサイクル不変量を構成するには、準自明カンドルと、その (準自明カンドルホモロジーの意味での) 2 次元コサイクルを用いれば良いことが明らかになった。

(2) 簡約結び目カンドルは、準自明カンドルである。簡約結び目カンドルの 2 次元準自明カンドルホモロジー群には、絡み目の各成分に対応した基本類が定まる。準自明カンドルによる X 彩色の (準自明カンドルホモロジーの意味での) 2 次元コサイクル θ による重みとは、対応する表現が誘導する 2 次元準自明カンドルホモロジー群の間の準同型による基本類の像を θ で評価した値に他ならない。

まず、簡約結び目カンドルの 2 次元準自明カンドルホモロジー群が、絡み目の非自明な成分 (2 次元円板の境界とはならない成分) に対応する基本類で生成されていることを示した。これにより、(1) で構成した絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量には、自明な成分と非自明な成分を判定する潜在能力があることが明らかになった。

次に、「二つの絡み目が絡み目ホモトピー同値であるための必要十分条件は、対応する簡約結び目カンドルの間に同型写像があり、誘導する 2 次元準自明カンドルホモロジー群の間の同型写像が基本類を基本類にうつすことである」という予想の解決に取り組んだ。残念ながら予想の解決にはまだ至っていないが、ある条件の下では予想が正しいことを示した。予想が正しければ、(1) で構成した絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量には、絡み目ホモトピー類を完全分類する潜在能力があることが分かる。よって、今後もこの予想の解決に取り組みたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Ayumu Inoue, *On the availability of quandle theory to classifying links*

up to link-homotopy, 京都大学数理解析研究所講究録「Intelligence of Low-dimensional Topology」(掲載決定), 査読なし, 2013.

- ② Ayumu Inoue, *Quasi-triviality of quandle for link-homotopy*, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* (掲載決定), 査読あり, 2013.
- ③ Ayumu Inoue, *Toward obtaining a table of link-homotopy classes: The second homology group of a reduced knot quandle*, 京都大学数理解析研究所講究録「RIMS 合宿型セミナー Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds」(掲載決定), 査読なし, 2013.
- ④ 井上 歩, *カンドルを利用した絡み目ホモトピー類の分類に向けて*, 研究集会「結び目の数学 IV」報告集, 査読なし, 2012, pp. 249–255.

[学会発表] (計 8 件)

- ① Ayumu Inoue, *On the availability of quandle theory to classifying links up to link-homotopy*, 研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」, 2013 年 5 月 22 日, 京都大学.
- ② Ayumu Inoue, *Quasi-triviality of quandles for link-homotopy*, 国際研究集会「Knots in Washington XXXV」, 2012 年 12 月 8 日, The George Washington University, Washington, DC, U. S. A.
- ③ 井上 歩, 「それぞれほどける」は「ぜんぶほどける」か?, 研究集会「2012 琉球結び目セミナー」, 2012 年 9 月 3 日, てんぶす琉球.
- ④ 井上 歩, *結び目カンドルの表現からわかる絡み目の幾何について*, 研究集会「第 59 回トポロジーシンポジウム」, 2012 年 8 月 12 日, 佐賀大学.
- ⑤ Ayumu Inoue, *An approach to classifying links up to link-homotopy using quandle colorings*, 研究集会「RIMS Seminar: Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds」, 2012 年 5 月 28 日, 強羅静雲荘.

- ⑥ 井上 歩, 絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量, 日本数学会 2012 年度年会, 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学.
- ⑦ Ayumu Inoue, *Quandle and link-homotopy*, 国際研究集会「The Eighth East Asian School of Knots and Related Topics」, 2012 年 1 月 10 日, KAIST, Daejeon, Korea.
- ⑧ 井上 歩, カンドルを利用した絡み目ホモトピー類の分類に向けて, 研究集会「結び目の数学 IV」, 2011 年 12 月 27 日, 東京女子大学.

[その他]

ホームページ等

<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ainoue/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

井上 歩 (INOUE AYUMU)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・

科学研究費教育研究支援員

研究者番号 : 10610149

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし