

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月15日現在

機関番号：13701

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2011～2012

課題番号：23840016

研究課題名（和文） スピンコートの数理

研究課題名（英文） Mathematical analysis of spin-coat

研究代表者

澤田 宙広 (SAWADA OKIHIRO)

岐阜大学・工学部・准教授

研究者番号：80451433

研究成果の概要（和文）：スピンコート現象に熱対流を考慮したモデルに対する数理解析を行った。平行平板内を占める回転流体運動にコリオリ力・遠心力・表面張力・重力・熱対流の効果を検討したモデルを構築した。このモデル問題に対する、時間局所可解性について研究を進めた。特に、圧力項の評価について、以前の研究結果よりも更に精密な議論を行い、得られた解の数学的厳密性を深く考察した。熱対流効果を考慮したモデルの数理解析的考察は、「不安定性」定理の獲得に至るための大事な一歩である。

研究成果の概要（英文）：We study the mathematical analysis of the spin-coat model with the heat convection. We propose the suitable model, and proved the local existence and uniqueness of mild solutions to the rotating Navier-Stokes equations coupled with the heat transport equation in a layer-like domain with Coriolis force, centrifugal force, surface tension, partially-slip boundary conditions, acceleration of gravity and heat convection terms. In particular, we give the precise estimates for the gradient of the pressure terms. Also, the mathematical validity of obtained solutions is investigated. From the new estimates for the solutions to the linearized equations, we can improve the existence time of locally-in-time mild solutions to the nonlinear problem. Analysis of this model coupled with latent heat effects is important regarding as the first step for the rigorous proof of the instability theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：偏微分方程式、スピンコート、ナビエ・ストークス

1. 研究開始当初の背景

(1) 今までに、境界が無い領域で考えた場

合の、回転（およびより一般にひずみ流などの）流体運動現象（非定常ナビエ・ストークス）

クス方程式で記述される)において、滑らかな時間局所解の一意存在定理を証明してきた。また方程式の適切性について、初期速度場が属する関数空間による特徴付けの観点から導くことに対して、ある程度の十分条件を獲得してきた。特に、圧力項が適切な条件のもとでは一意性が導かれ、それを越えると非一意性が示されることも調べられてきた。

(2) 平行板領域が粘性非圧縮流体で満たされていて、初期条件が静止状態に近い、かつ回転していない場合には、その初期値境界値問題における解の存在定理についてある程度の結果を得ていた。その際に必要となる解の滑らかさについても、最大正則性定理の観点から、適切な関数空間の設定が当初から知られていた。特に、境界条件が第3種の場合に対するトレース理論の整備、妥当な意味付けは詳細に分かっていた。

2. 研究の目的

(1) 円盤上に粘着物質の溶液を置き、円盤を回転させた時の遠心力による溶液(流体)の散逸と粘性拡散効果・重力加速・表面張力・蒸発効果により円盤に薄い皮膜を付着させる工業的手法である。実際に、半導体・トランジスタの絶縁体やDVD・Blu-ray Discの色素の塗布などで用いられる。より精度の高い工業製品を製作するために、皮膜を出来る限りムラがなく均一で薄くなるように材質や回転速度などを制御する。また均一性が保たれ難い場合には、それが何故なのか、どのような現象論的背景があるのかを調べ、数理解析的見地からの提言を行うことが研究当初の目的であった。スピコート現象の中で、粘性流体の回転運動が支配的な段階について数理解析的な定式化を行うことを目指した。具体的には、2枚の平行平板(表面と底)に挟まれた領域における粘性非圧縮流体の回転運動を考える。溶液と円盤の間(底)ではナビエのスリップ境界条件を課す。特に、厚みの大きいところは滑りやすいと言う観測結果を反映した非線形の境界条件を考える。溶液と空気の間(表面)は自由境界、すなわち形状が時間変化するモデルを考えるが、境界の変化は境界上での流速以外にも表面張力・熱対流・蒸発・潜熱の効果などに支配される。それらのモデルにおける、滑らかな時間局所解の一意存在定理および得られた解の性質を調べる。物理パラメータ(密度、粘性係数等)を変えた時に、滑らかな解の存在時間がどう変化するのかを詳細に調べることによって、有効なパラメータを計量的に判断する手法を確立する。安定性または不安定性を議論するために、時間大域的に存在する弱解(超関数の意味で方程式を満たす解)を構成する。更には、線形化問題の固

有値を調べることで、線形安定性または不安定性の理論を構築する。特に、自由境界の滑らかさが失われていく過程を詳細に考察する。不安定性(不均一性)を引き起こす要因を弱くする適切なパラメータの選び方に指針を与えることで、制御問題に貢献することが本研究の最終目的であった。

(2) 本研究では先行研究で築いたスピコートモデルの理論に熱変動などを組み込んだ緻密なモデルを立てて、滑らかな時間局所解の一意存在定理の証明に挑戦した。単純な状況での弱解が構成されているが、その手法を応用して、熱変動込のスピコート問題でも弱解の存在定理を導くことに挑戦した。線形化方程式の詳細な解析を行い、解作用素の固有値を調べることで線形安定性・不安定性を議論する。また蒸発の効果を検討したモデルについても取り扱う。蒸発効果に注目すると、流体の密度が一定にならないとの設定は現象を忠実に表現しているが、数学的手法の困難さから本研究の初期段階においては密度一定の非圧縮流体を考える。また円盤と流体の境目にはスリップ境界条件を課し、流体の表面は流速・表面張力・蒸発効果のバランスによって定まる自由境界値問題として捉える。スリップ境界条件はこのモデルの物理現象論的観点・実験観測から鑑みて合理的な設定である。だが、数学で良く用いられる粘着境界条件とは異なるため、その数学的考察は本研究の大きな特徴である。自由境界値問題を解くのに際しては、相転移モデルの解析でも使われる半沢変換を用いて領域を平行板に固定する。この問題を線形化したものに対し、古典解の存在定理および適切なクラスでの解の一意性を得る事が本研究の初期段階における最初の目標となる。存在定理の証明には、近年発展してきた最大正則性の理論を改良する必要があった。それにはラプラス変換を行って同値のレゾルベント方程式を解く事を試みる。更にフーリエ掛算作用素の理論を整備しておく。問題となる作用素の有界性を示すのに、作用素値のフーリエ掛算作用素の研究およびニュートンポリゴンの方法と作用素の補間定理を応用する。

(3) 線形化問題が解けたならば、非線形問題にも挑戦して行く。非線形の問題を扱う時には、線形化による1次近似と、更に2次近似を用いる必要がある所に本研究の独自性がある。非線形問題では特に、圧力勾配の振舞いを詳細に考察する事が現象の解明において大きな意味を持つ。また解の滑らかさを得る事が自由境界値問題の正当化において重要な意味を持つが、それを調べて行くのにも最大正則性の理論を状況に応じて改良して行く。更に、定常解の存在・非存在および

一意性についても議論して行く。観察された実験結果から、定常解がもし存在したとしても不安定または非常に弱い安定性しか持たない事が予想されるが、それを数学の言葉で証明して行きたい。不安定性を証明する事により、当初の目標だった「なぜ均一性が崩れるのか？」との問いに対して、数学からの一つの解答を提示する。これまでは非圧縮流体を考えてきたが、蒸発効果をより詳細に記述するために密度が変化するモデル(ある種の圧縮性流体または非ニュートン流)についても同様の結果を得る事が出来るのか挑戦する。圧縮性の場合の線形化問題は、非圧縮性のそれとは異なるため、新しい手法を用いる必要がある。具体的にはエネルギー法により解の存在と一意性を証明して行く。圧縮性流体の運動における流体の密度および圧力の変化に注目してスピコート現象を力学的に解明して行く。また境界層の問題にも着手して行きたい。実際に粘性流体と回転円盤の接する境界付近では、より複雑な方程式によって流体運動が記述される。それらを研究してより実際の現象に近い定式化を行いたい。非ニュートン流についても同様の考察を進める。

(4) 上記の研究で獲得した時間局所適切性の限界を初期速度場の属する関数空間による特徴付けを行うことも目指した。これは関数空間を余りに広げると、得られた解が初期速度場に連続依存しなくなることを突き止めることを目的としていた。

3. 研究の方法

(1) スピコート現象における蒸発効果の小さい場合(単純モデル)の初期値境界値問題を考え、それぞれの効果を反映した項を取り込んだ非線形偏微分方程式と境界条件の設定、その問題における解の一意存在定理の証明および解の十分な滑らかさを得る事を目標とする。単純モデルの定式化においては、平行板に近い領域内を粘性非圧縮性流体が満たしているとし、その流体の運動はナビエ・ストークス方程式に熱方程式をカップルさせて、コリオリ効果・遠心力・重力加速・熱対流を考慮したものに支配されているとする。流体の底はナビエのスリップ境界条件を課す。これは厚みの大きいところがより滑りやすい状況を反映した境界条件である。流体の表面(溶液と空気の境目)は自由境界値問題として扱う。自由境界の運動は表面の流速のみならず表面張力などに依存して決定されるものとする。この単純モデルの定式化および線形化を行う。次に線形化方程式の初期値境界値問題の解の存在定理を得る。これに際しては、近年盛んに研究されている最大正則性の理論を応用する事に主眼を置いて

進めて行く。そのためにはラプラス変換・作用素値のフーリエ掛算作用素の理論・作用素の補完定理を適宜使用する。更に、ニュートンポリゴンの方法と補完定理を用いる。また同様の手法で一意性を得る。それらの手法の専門書を購入し研究を進める。スピコートに関連した研究会に出席して、または専門家を国内・海外から招聘して、この問題に対する数理解析の手法を確立を目指した。

(2) 上記で得られた線形問題の解の性質について詳しく調べて、非線形問題に挑戦するのに必要な道具を揃えた。そして非線形問題の解の一意存在定理および解の滑らかさを獲得することを目指す。特に、自由境界値問題を考えているため、この定式化の妥当性を議論するには、構成された解が相応の滑らかさを持つことを証明することが重要となる。滑らかさを得るためには、解析半群の理論を整備して適用する事が主導的な役割を果たす。同時に単純モデルにおける弱解(超関数の意味で方程式を満たす解)の大域存在定理を導き、安定性を議論する。特に、線形作用素の固有値を調べる事で線形安定性または不安定性を証明する。線形化は領域が平行平板に挟まれたものを、更に圧力と遠心力がバランスするモデルを基準にして行われたが、その基準の適切性・妥当性を安定性獲得の観点から議論する。それらの研究が完了した後、非線形の安定性を調べる。更に、熱対流によるパターン形成がスピコート現象において観測されるのか、力学系の理論を応用して調査する。更に得られた数学的理論を数値計算や現実のスピコート現象の実験結果と照らし合わせて、数理解析を行った単純モデルの妥当性について議論する。

4. 研究成果

(1) スピコート現象に熱対流を考慮したモデルに対する数理解析を行った。平行平板内を占める回転流体運動にコリオリ力・遠心力・表面張力・重力・熱対流の効果を考慮したモデルを構築した。このモデル問題に対する、時間局所可解性について研究を進めた。特に、圧力項の評価について、以前の研究結果よりも更に精密な議論を行い、得られた解の数学的厳密性を深く考察した。獲得した線形化問題の解のより詳しい評価を用いて、非線形の問題に対する解の存在時間に対する既存の結果の改良できた。熱対流効果を考慮したモデルの数理解析的考察は、潜熱による非均衡化・不安定性定理の獲得に至るための大事なファーストステップである。

(2) 本研究の主要な目的である「解の一意存在定理」の証明には、近年発展してきた最大正則性の理論を適切に改良して応用した。

即ち、ラプラス変換を行って同値のレゾルベント方程式を解く事を試みた。レゾルベント問題の線形化モデルを解くにあたって自由境界を固定化する必要があるが、将来の研究で蒸発効果を考慮したモデル扱うために、半澤変換を用いて平行平板領域に固定した。更に、線形の問題ではあるが、圧力項の評価を詳細に導くため、領域の分割を行わずに解を構成するという工夫が必要となった。主要な数学的道具は、フーリエ掛算作用素の理論である。様々な関数空間におけるフーリエ掛算作用素、ニュートンポリゴンの方法、作用素の補間定理などを応用して「ある程度の滑らかさを有する時間局所解の一意存在定理」を示した。

(3) 初期速度場が特殊な構造を有している時に対する、時間大域解の構成にも成功した。これは圧力勾配の影響が消える状況を利用し、最大値原理を適用することによって時間局所解の延長を導いた。この考察により、時間局所適切性と不適切性の境目を初期速度場の属する関数空間による特徴付けが可能になった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計0件)

〔学会発表〕(計7件)

澤田 宙広、Asymptotic behavior of renormalization solutions of the incompressible fluid、第5回名古屋微分方程式研究集会、2013年3月11日、名古屋大学

澤田 宙広、ナヴィエ・ストークス方程式の臨界空間での非適切性定理、日本数学会秋季総合分科会、2012年9月21日、九州大学

澤田 宙広、Ill-posedness theory and norm-inflation argument of the 3-D Navier-Stokes equations in the critical Space、Parabolic and Navier-Stokes Equations 2012、2012年9月3日、バナッハ研究所(ポーランド)

澤田 宙広、Ill-posedness and norm-inflation arguments of the 3-D Navier-Stokes、Workshop of complex fluids、2012年7月12日、ダルムシュタット工科大学(ドイツ)

澤田 宙広、スピンコート現象の数理モデルにおける最大正則性定理の応用、早大流体数学セミナー、2012年2月6日、早稲田大学

澤田 宙広、スピン・コート現象の数理解析

最大正則性定理の応用、北大PDEセミナー、2012年12月12日、北海道大学
澤田 宙広、スピン・コート現象の数理～最大正則性定理応用とニュートンポリゴンの方法～、神戸解析セミナー、2011年12月2日、神戸大学

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

澤田 宙広(SAWADA OKIHIRO)
岐阜大学・工学部・准教授
研究者番号: 80451433

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし