様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　２５年　５月　２７　日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2011～2012
課題番号：２３８４００２０
研究課題名（和文）　測度の集中現象の幾何学的応用

研究課題名（英文）　Geometric application of concentration of measure phenomenon

研究代表者
船野　敬（KEI FUNANO）
京都大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：４０６１４１４４

研究成果の概要（和文）：測度の集中現象の観点から非負リッチ曲率を持つ閉リーマン多様体上のラプラシアンの固有値の性質を東北大学の塩谷隆氏と共同で研究した．成果として，非負リッチ曲率を持つ閉リーマン多様体のラプラシアンの第 k 固有値は第 1 固有値と k だけによる普遍定数の積で上から押えられることがわかった．その際にリッチ曲率の下限にあたる概念である曲率次元条件の集中位相に関する安定性の結果を得た．これは測度付きグロモフ・ハウスドルフ位相に関する曲率次元条件の安定性の拡張に当たる結果である．

研究成果の概要（英文）：We studied properties of eigenavalues of Laplacian on closed Riemannian manifolds of nonnegative Ricci curvature. One of our achievements is the k-th non-trivial eigenvalue of Laplacian on such manifolds is bounded by the first eigenvalue times universal constant depending only on k. In our proof, we obtained a stability result of curvature-dimension condition under concentration topology. This result extends the known-result that cuvature-dimension condition is stable under the measured Gromov-Hausdorff topology.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2011 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2012 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：幾何学
科研費の分科・細目：数学、数学・幾何学
キーワード：測度の集中、ラプラシアン

１．　研究開始当初の背景

Li-Yau と Cheng によりリッチ曲率の下限の仮定の下に閉リーマン多様体の直径とラプラシアンの固有値に対して関係式が見出されていた．Li-Yau の不等式は次元に寄らないのに対して Cheng の不等式では次元の項が現れる．一方 Gromov が導入した直径の代替物である observable 直径を用いるとラプラシアンの第一固有値と observable 直径の間に次元普遍な関係が見い出せることが Gromov-V. Milman, E. Milman によって明らかにされていた．一方で，測度距離空間の空間には測度付き Gromov-Hausdorff 位相が

入っており，深谷賢治氏や Cheeger-Colding によってその位相に対するラプラシアンの固有値の安定性が示されていた．これらは全て次元が一様に上から押さえられた場合に示されていたが，Gromov により新たに測度距離空間の空間に集中位相という測度の集中現象と測度付きグロモフハウスドルフ位相を同時に拡張した位相が導入された．この位相では次元が無限大に発散するような多様体の列を扱うことが自然に出来る．特に，Gromov-V. Milman と E. Milman の結果を併せると非負リッチ曲率を持つ閉リーマン多様体の列がこの集中位相に関して１点からなる空間に収束することと，その列の多様体のラプラシアンの第一固有値が無限大に発散することは同値となることがわかっていた．

２．研究の目的

測度の集中現象の幾何学と解析学への応用を本研究の目的としていた．測度の集中現象は，多様体の収束の観点からは１点からなる空間に Gromov が新たに導入した observable 距離に関して収束することと捉えられる．observable 距離の定める測度距離空間全体の上の位相(集中位相)は従来の測度付 Gromov-Hausdorff 距離の定める位相よりも非常に弱いが，Ricci 曲率の一様な下限と次元の一様な上限の仮定の下で，多様体の列に対しこれらが定める収束は一致することが知られている．observable 距離の収束では測度付 Gromov-Hausdorff 収束では扱えなかった無限大に発散する自然な多様体の列を取り扱う事も可能である．次元が一様に有界とは限らない閉 Riemann 多様体の Laplacian の固有値の挙動をこの observable 距離の収束の言葉を用いて捉え，Laplacian の固有値の次元普遍な性質を得ることを目標とした.またより大きな問題として，集中位相でどのような幾何学的性質，解析的性質が保たれるのかということも目標としていた．特に，極限空間がいつ弧状空間になるか，リッチ曲率が下に有界であるという条件（曲率次元条件）が保たれるか，ラプラシアンの固有値の安定性が言えるのかという問題を目標としていた．

３．研究の方法

非負リッチ曲率を持つ閉リーマン多様体のラプラシアンの固有値の次元普遍な性質を得るために次元が無限大に発散するような閉リーマン多様体の列をとり，その列に関してのラプラシアンの固有値の挙動を調べる．挙動を調べる際に，多様体の列が収束している場合が好ましいので，observable 距離に関する収束をみる．この測度距離空間の間の距離は Gromov によって導入されたが，測度付き Gromov-Hausdorff 収束と測度集中を同時に拡張するような概念となっている．この距離が定める位相は集中位相と呼ばれる．閉リーマン多様体の列が集中位相で一点に収束することは observable 直径が０に収束することと同値となり，これはその列が測度集中を引き起こしていることと同地である．さらに Gromov-V. Milman と E. Milman の定理を併せると非負リッチ曲率を持つ閉リーマン多様体の列が集中位相に対して１点からなる空間に収束することとその列の多様体のラプラシアンの第一固有値が無限大に発散することは同値となる． ラプラシアンの第一固有値とは限らない一般の固有値の振る舞いは，測度集中だけでは捉えることは一般に不可能で，測度集中の概念を拡張した概念が必要となる．その際に測度集中を拡張した二つの概念である集中位相と separation を研究する．Separation に関する Cheng-Grigor’yan-Yau の結果を用いるとラプラシアンの第 k 固有値が無限大に発散する列は observable 直径を一様に制限すると高々k 点からなる測度距離空間に収束することがわかる．よって，もし極限空間が連結であることがわかるとその極限空間は１点となる．従って，E. Milman の結果を用いるとその列の多様体が非負リッチ曲率を持つならばラプラシアンの第１固有値が無限大に発散することがわかるので，第 k 固有値と第１固有値の間に次元普遍な関係性を見出すことができるのである．従って，極限の連結性のみを示せば良いのであるが，これを曲率次元条件 CD(K,∞)の集中位相のもとでの安定性を示すことによって示す.

４．研究成果

東北大学の塩谷隆氏との共同研究で Gromov が導入した測度距離空間の空間の位相である集中位相に関する曲率次元条件 CD(K,∞)の安定性の結果を得た．これは Lott-Villani, Sturm によって得られていた測度付 Gromov-Hausdorff 収束に関する曲率次元条件 CD(K,∞)の安定性の拡張となっている．特に Ricci 曲率の下限を仮定したリーマン多様体の列の集中位相に関する極限の連結性を得た．測度集中の概念を一般化した separation という概念とラプラシアンの第一固有値とは限らない一般の固有値の振る舞いを比べた Chung-Grigor’yan-Yau の結果を用いてラプラシアンの第 k 固有値が無限大に発散する閉リーマン多様体の列は高々k 点からなる測度距離空間に集中位相のもとで収束することを示した．系として，第 k 固有値が無限大に発散するような閉リーマン

多様体の列は高々k 点からなる測度距離空間位集中位相のもとで収束するが，その列の多様体に非負リッチ曲率を仮定すると極限空間の連結性がいえるので，E. Milman の定理とあわせてラプラシアンの第一固有値が無限大に発散することを示すことができた．即ち，非負リッチ曲率を持つ閉リーマン多様体の列に対してラプラシアンの第k固有値が無限大に発散することと第一固有値が無限大に発散することが同値となることがわかった．このことを用いて，非負リッチ曲率を持つ閉リーマン多様体のラプラシアンの第k固有値がkだけによる普遍定数と第1固有値の積により上から押えられるという次元普遍不等式を得ることができた．同様のことが非負リッチ曲率を持つ閉リーマン多様体の C2 級の境界を持つ有界凸領域のノイマンラプラシアンに関する固有値に対しても成り立つことを示した．上記結果を論文としてまとめ Geom. Funct. Anal.に掲載が決まった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
1. Kei Funano and Takashi Shioya, Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian, Geom. Funct. Anal. に掲載決定.
   DOI: 10.1007/s00039-013-0215-x
2. Kei Funano, Two infinite versions of the nonlinear Dvoretzky theorem, Pacific J. Math. 259, 2012, no. 1, pp. 101–108
   DOI: 10.2140/pjm.2012.259.101

〔学会発表〕（計 16 件）
1. 船野敬，Concentration, separation, and eigenavlues of Laplacian, Connections for Women on the concentration of measure phenomenon, 2013 年 3 月 6 日，名古屋大学
2. 船野敬，ラプラシアンの固有値の間の数値的普遍不等式について，リーマン幾何と幾何解析，2013 年 2 月 22 日，筑波大学
3. 船野敬，Concentration, separation, and eigenvalues, Sturm seminar, 2013 年 1 月 23 日，Bonn university
4. 船野敬，測度集中とラプラシアン，談話会，2012 年 12 月 19 日，京都大学
5. 船野敬，無限版と lp 版非線形ドボレツキーの定理について，多様体の微分方程式，2012 年 11 月 15 日，金沢大学
6. 船野敬，無限版と lp 版非線形ドボレツキーの定理について，幾何学阿蘇研究集会，2012 年 9 月 25 日，休暇村南阿蘇（熊本県阿蘇郡）
7. 船野敬，無限版非線形ドボレツキーの定理について，幾何学シンポジウム，2012 年 8 月 27 日，九州大学
8. 船野敬，無限版と lp 版非線形ドボレツキーの定理について，剛性セミナー，2012 年 6 月 8 日，名古屋大学
9. 船野敬，Infinite and lp versions of nonlinear Dvoretzky's theorem, Group actions and K-theory, 2012 年 3 月 14 日，京都大学
10. 船野敬，無限版非線形ドボレツキ―の定理について，測地線及び関連する諸問題，2012 年 1 月 8 日，熊本大学
11. 船野敬，Some infinite versions of nonlinear Dvoretzky's theorem, Doctorial Forum of Mathematics between Fudan and Kyoto Universities, 2011 年 11 月 3 日，復旦大学
12. 船野敬，Concentration of measure phenomenon and eigenvalues of Laplacian, 5th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 2011 年 9 月 6 日，Bonn university
13. 船野敬，測度の集中現象とラプラシアンの固有値の挙動，東京確率論セミナー，2011 年 7 月 4 日，東京工業大学
14. 船野敬，Concentration, convergence, and eigenvalues of Laplacian, GCOE tea time, 2011 年 6 月 21 日，京都大学
15. 船野敬，測度の集中現象とラプラシアンの固有値の挙動，九州大学幾何学セミナー，2011 年 6 月 3 日，九州大学
16. 船野敬，S.Y.Cheng による定理の一般化について，微分トポロジーセミナー，2011 年 4 月 12 日，京都大学

〔その他〕
ホームページ等

https://sites.google.com/site/keifunanoshomepage/

６．研究組織
(1)研究代表者
　船野　敬　(FUNANO KEI)
　京都大学・大学院理学研究科・助教
　研究者番号：

(2)研究分担者
　なし

(3)連携研究者

塩谷　隆　(SHIOYA TAKASHI　)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90235507