様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月３１日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：２０１１～２０１２
課題番号：２３８４００２１
研究課題名（和文）絡み目のラスムッセン不変量の研究

研究課題名（英文）On the Rasmussen(Beliakova-Wehrli) invariant for links

研究代表者
安部　哲哉（ABE TETSUYA）
京都大学・数理解析研究所・研究員（GCOE）
研究者番号：００６１４００９

研究成果の概要（和文）：結び目に対して定義されるラスムッセン不変量の絡み目への拡張である Beliakova-Wehrli 不変量が絡み目の種々の操作についてどのように振る舞うのかについて考察した。また、ラスムッセン不変量と密接な関係があるスライス結び目の性質について考察した。

研究成果の概要（英文）：We studied the Beliakova-Wehrli invariant for a link which is a generalization of the Rasmussen invariant for a knot. We also studied a slice knot which is closely related to the Rasmussen invariant.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１１年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２０１２年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：結び目、絡み目、ラスムッセン不変量、Beliakova-Wehrli 不変量、コバノフホモロジー、リーホモロジー、コンコーダンス群、スライス結び目、リボン結び目、スライス・リボン予想、ハンドル図式（カービー図式）

１．研究開始当初の背景

ラスムッセン不変量はコバノフホモロジーに由来する整数値の結び目不変量である。ラスムッセン不変量が、結び目の種々の操作に関してどのように振る舞うのかについてはよく理解されており、また（トーラス結び目の結び目解消数に関する）ミルナー予想の組み合わせ的な証明を与える等、様々な応用が知られていた。

この不変量は Beliakova と Wehrli により絡み目に拡張された（以後、この不変量を、Beliakova-Wehrli 不変量と呼ぶ)。一方で、

絡み目に対して定義されるBeliakova-Wehrli 不変量が、絡み目の種々の操作に関してどのように振る舞うかは十分に理解されておらず、また、際立った応用も知られていなかった。

２．研究の目的

本研究の目的は以下の３つであった。

（１） Beliakova-Wehrli 不変量の基本的な性質を解明.すること

（２） Beliakova-Wehrli 不変量の評価を改良すること

（３） Beliakova-Wehrli 不変量の応用を見つけること。特にエキゾチック四次元多様体の構成への応用を探すこと。

３．研究の方法

本研究では以下の研究方法を実行した。

（１）研究目的を実現するために、絡み目に関する基本的な操作である鏡像に関してBeliakova-Wehrli 不変量がどのように振る舞うのかについて調べた。特に、どのようなクラスに関して Beliakova-Wehrli 不変量が望ましく振る舞うのかを調べるために、次の事実を用いた。

結び目や絡み目のコボルディズムを構成するごとに，ラスムッセン不変量やBeliakova-Wehrli 不変量の評価が得られる。特に川村友美氏（名古屋大学）は与えられた結び目や絡み目に対して、具体的に「いい」コボルディズムを構成することによって、ラスムッセン不変量や Beliakova-Wehrli 不変量の評価を得た。

（２）ラスムッセン不変量やBeliakova-Wehrli 不変量は、コバノフホモロジーの亜種であるリーホモロジーのあるホモロジークラスから完全に決定される。特に、そのホモロジークラスの代表元全体から決まる。
研究目的を実行するために、リーホモロジーのあるホモロジークラスの代表元を取り変える操作を定式化して、ラスムッセン不変量や Beliakova-Wehrli 不変量の評価の改善を目指した。

（３）フリードマンの定理を認めると、ラスムッセン不変量の計算からエキゾチックな四次元ユークリッド空間が存在することが証明できることが知られていた。
研究目的を実現するために、ラスムッセン不変量や Beliakova-Wehrli 不変量の計算から四次元のエキゾチックな多様体の構成を得る方法の確立を目指した。

４．研究成果

（１）まず川村友美氏の方法で、いつ（結び目の）ラスムッセン不変量が決定できるのかを詳細に調べた。その結果、P. Cromwell 氏によって導入された等質結び目に関して、前述の不等式でラスムッセン不変量が（ある意味で必要十分で）決定できることがわかった。この結果は、Proc. Amer. Math. Soc から出版された。

結び目の場合の証明を少し修正することによって、等質絡み目に対してBeliakova-Wehrli不変量が完全に決定できることを証明した。またこのことから、等質絡み目に関しては、鏡像に関して綺麗に振る舞うことがわかった。

一方で、どのような絡み目が鏡像に関してBeliakova-Wehrli不変量が上手く振る舞わないのかについて詳細に調べた。

以上の結果をまとめようとしていたときに、J. Pardon 氏が Beliakova-Wehrli 不変量とは異なるラスムッセン不変量の拡張を与え、その定式化では鏡像に関して綺麗に振る舞うことを証明した。これにより、鏡像に関する問題は（予期せぬ形で）解決した。

Pardon の不変量が鏡像以外の絡み目の種々の操作に関してどのように振る舞うかを調べることは今後の課題である。

（２）シャーパーベネカン不等式は、ラスムッセン不変量の有効な評価の一つである（この評価も川村友美氏によって導入されたものである）。リーホモロジーのある元の代表元を組織的に変える方法を定式化して、シャーパーベネカン不等式の別証明を与えた。この結果は Topology and its Applications に掲載された。

また、この手法が Beliakova-Wehrli 不変

量に関しても同様に成り立つことを証明した。

その後、この手法に関する進展がなかったが、最近、田神慶士氏（東京工業大学）によって、概正結び目や絡み目のラスムッセン不変量や Beliakova-Wehrli 不変量に関してこの手法が有効であることが報告されている。

（３）近年ラスムッセン不変量が注目を集めた理由の一つは、ラスムッセン不変量の計算を通じて滑らかなカテゴリーにおける四次元ポアンカレ予想を（否定的に）解決できる可能性があったからである。

2011 年に Kronheimer と Mrowka は、インスタントンホモロジーの変種を用いてラスムッセン不変量の新しい定義を与えた。系として、ラスムッセン不変量を用いて滑らかなカテゴリーにおける４次元ポアンカレ予想を反証するという Freedman-Gompf-Morrison-Walker のアイデアは実行不可能であることを示した。

上述の研究に刺激を受けて、2012 年度以降は Freedman-Gompf-Morrison-Walker のアイデアを（ラスムッセン不変量と非常に関連がある）スライス結び目の構成に応用することを試みた。

a. 四次元多様体は，カービー図式と呼ばれるものにより表されることが知られている。

鄭仁大氏（近畿大学)、大前裕佳氏（元大阪大学）と竹内勝則（元大阪大学）との共同研究により，無限個の（一つの枠付き結び目からなる）カービー図式表示を持つ４次元多様体を構成した.
その手法の応用によりスライス・リボン予想の反例候補を組織的に構成する方法を得た。正確には、境界が三次元球面のホモトピー４球体の中で２次元円板を張る結び目の組織的な構成方法を得た。
この結果は Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. に掲載された（報告時点ではオンラインのみ)。

b. 丹下基生氏（筑波大学）との共同研究において、上述の一つの例に関して実際にスライス結び目になることを示した（スライス結び目とは、四次元球体で２次元円板を張る結び目のことである)。さらに定理の証明で用いたカービー計算を吟味することにより、ここで得られたスライス結び目はリボン結び目であることを確認した。これにより、この結び目に関してはスライス・リボン予想が正しいことがわかった。この結果は RIMS Kokyuroku に掲載された。

c. 丹下基生氏との共同研究において、鄭仁大氏、大前裕佳氏と竹内勝則氏との共同研究において構成されたホモトピー４球体がすべて四次元球体になることを証明することによって（b. で得られた結果の拡張）スライス結び目を構成する計画は完了し、目標を達成した。

また、この構成で得られたスライス結び目のある無限個の系列がリボン結び目になることを証明した。これにより、この系列に関してはスライス・リボン予想が正しいことを確認した。この結果に関する論文の執筆は完了しており、現在、投稿準備中である。

本研究と関連して、以下の結果が得られた。

（４）バンド手術で結び目をほどくことは，その結び目が四次元球体でどのような曲面を張れるのか、と密接な関係があり、ラスムッセン不変量や Beliakova-Wehrli 不変量と関係が深い。金信泰造氏（大阪市立大学）との共同研究において次の結果を得た。

定理. 四次元球体で（自然な高さ関数に対する）臨界点が２つの向き付け可能な曲面は張るが，臨界点が２つの向き付け不可能な曲面は張れない結び目が無限個存在する。

上述の結果は Kobe journal of Mathematics に掲載予定である。

（５）結び目解消数はラスムッセン不変量と密接に関係がある不変量である。
花木良氏（奈良教育大学）と比嘉隆二氏（神戸大学）との共同研究において、結び目解消数が結び目の交点数に対して十分に大きい時、その結び目はたかだか３ブレイド結び目であることを証明した。またこの事実の種々の応用を与えた。この結果は、Osaka J. Math に掲載された。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

1. T.Abe, T. Kanenobu, Unoriented band-surgery on knots and links, to appear in Kobe Journal of Mathematics. (2013), 掲載決定. 査読有り

2. T.Abe, I. Jong, Y. Omae and M. Takeuchi, Annulus twist and diffeomorphic 4-manifolds, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (2013) 1-17 (online). 査読有り
http://arxiv.org/pdf/1209.0361v2.pdf

3. T.Abe and M. Tange, Omae's knot and 12a990 are ribbon, RIMS Kokyuroku **1812** (2012), 34-42. 査読無し
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1812-04.pdf

4. T.Abe, R. Hanaki and R. Higa, The unknotting number and band-unknotting number of a knot, Osaka J. Math **49** (2012) No.2, 523-550. 査読有り
http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.ojm/1340197938

5. T.Abe, State cycles which represent the canonical class of Lee's homology of a knot, Topology and its Applications, Volume **159** (2012), Issue 4, 1, 1146-1158. 査読有り
doi:10.1016/j.topol.2011.11.042

6. T.Abe, The Rasmussen invariant of a homogeneous knot, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 2647-2656. 査読有り
http://arxiv.org/pdf/1003.5392v1.pdf

〔学会発表〕（計３件）

1. 安部哲哉, Omae's knot and 12a990 are ribbon, 日本数学会秋季総合分科会, 2012年9月20日, 九州大学,

2. Tetsuya Abe, Annulus twists and diffeomorphic 4-manifolds, The 6th European Congress of Mathematics, Jagellionian University, Poland, 2012/7/5.

3. 安部哲哉, Unoriented band surgery on knots and link, 日本数学会春季総合分科会, 2012月3月26日, 東京理科大学.

６．研究組織
(1)研究代表者
安部　哲哉（ABE TETSUYA）
京都大学・数理解析研究所・研究員（GCOE）
研究者番号：００６１４００９

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし