

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月15日現在

機関番号： 52301
 研究種目： 研究活動スタート支援
 研究期間： 2011～2012
 課題番号： 23840026
 研究課題名（和文） ブレイド群の直積への Hurwitz 作用とその応用
 研究課題名（英文） Hurwitz action on systems of braids
 研究代表者 矢口 義朗（YAGUCHI YOSHIRO）
 群馬工業高等専門学校・一般教科（自然科学）・講師
 研究者番号： 90613018

研究成果の概要（和文）：

- 1) ブレイド群の直積への Hurwitz 作用の研究は、ブレイド状曲面という4次元球体内の曲面の研究へ応用できることが知られている。ブレイド群の第1ジョンソン準同型を用いて、ブレイドシステムにおける Hurwitz 同値不変量をいくつか構成し、ブレイド状曲面の1次多項式型の不変量を得た。
- 2) 穴あき円板内において2つの穴を結ぶ自己交差をもたない曲線の自然な同値類をコードとよぶ。コードを多角形の中の線分の非交和で表した「ダイアグラム」を定義した。3つの穴の開いた円板内の全てのコードを、ある線分との幾何学的交点数により完全に特徴づけた。

研究成果の概要（英文）：

- 1) Hurwitz equivalence on systems of braids is studied, which can be used in the study of braided surfaces. We obtained some invariants of the Hurwitz equivalence on the systems of braids by using the first Johnson homomorphism of the braid group. Then, we found some invariants of braided surfaces.
- 2) A cord is a simple curve on a punctured disk, which connects two punctures. We introduced diagrams which represent isotopy classes of cords. Using such diagrams, we made up a list of all isotopy classes of cords on a 3-times punctured disk. As a result, it was shown that they are completely parameterized by 3 non-negative integers.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2011年度	1,300,000	390,000	1,960,000
2012年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,520,000

研究分野： 幾何学

科研費の分科・細目： 位相幾何学

キーワード： ブレイド群, Hurwitz 作用, ブレイド状曲面, コード

1. 研究開始当初の背景

ブレイド群とは、ある条件を満たすように3次元球体へ埋め込んだ1次元多様体全体がなす群のことである。ブレイド群は任意の群の直積へHurwitz作用という自然な作用を与える。ブレイド群の直積をHurwitz作用で軌道分解することにより、ブレイド状曲面という4次元球体内の曲面の埋め込み型を完全に分類できることが知られている。しかし、ブレイド群の直積をHurwitz軌道分解することはとても難しく、現在も未解決である。そこで、ブレイド群からの準同型を持つ群の直積のHurwitz軌道分解を求め、この問題にアプローチをする方法が考えられる。群として小さいものを選べば計算は簡単になるが、その分ブレイド群の情報は失われるため、得られるブレイド状曲面の不変量は弱くなる。ゆえに、出来るだけ大きい群を選ぶことが重要である。

研究開始当初は、このような準同型として対称群と整数環上の自由加群との半直積への自然な準同型を選び、その(4つの)直積へのHurwitz軌道分解を計算し、(分岐点の個数が4つのときの)ブレイド状曲面を、整数でパラメーターづけすることに成功していた。そして、次に第1 Johnson準同型に目をつけ、ブレイド状曲面の多項式型の不変量を得ようとしていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、ブレイド群の直積や、ブレイド群からの準同型をもつ群の直積へのHurwitz作用について調べることと、それによって得られた結果を、ブレイド状曲面の分類や性質等の結果へ応用することである。

特に、ブレイド群からそれにできるだけ近い群への準同型を選び、Hurwitz軌道分解を完成させ、ブレイド状曲面を完全ではなくとも、出来るだけ細かいクラスに分けていき、1つ1つのクラスに共通する性質なども調べることが目的である。

3. 研究の方法

各成分が標準的生成元およびその逆元に共役なブレイドを単純ブレイドという。単純ブレイドの直積をHurwitz同値で分類すれば十分である。そこでまずは単純ブレイドの直積をJohnson準同型の直積写像で写した像を求める。次にこの像をHurwitz同値で分類し、曲面ブレイドの不変量を構成する。この研究では、ブレイド群の写像類群としての性質を利用したり、Hurwitz作用の組み合わせ的な

計算を用いる。

4. 研究成果

(1) ジョンソン準同型とブレイド状曲面の多項式型不変量について：

久野氏との共同研究により、ブレイド群からの第1 Johnson準同型 J_1 を、ブレイドのダイアグラムを用いて記述する方法を得て、単純ブレイド全体を J_1 で写した像を求めた。これを用いて、ブレイド状曲面の1次多項式型不変量を数多く見つけることが出来た。

さて Johnson準同型は、第1, 第2, ... と番号づけされており、始域をブレイド群に制限したときの終域は、番号が増加するごとに始域のブレイド群のより良い近似を与える。

(実際は、 $k > 2$ のときは J_k をブレイド群に制限した写像は準同型ではない。そこで、 J_k を Hurwitz作用と可換になるように調整したものを改めて J_k とかき、それを第 k Johnson準同型とよぶことにする。) 故に、 k が大きいほど、第 k Johnson準同型 J_k がもたらす曲面ブレイドの不変量は強力になる。

期間中において、ブレイド群からの第2 Johnson準同型 J_2 についても、ブレイドのダイアグラムを用いて記述する方法を得た。

(2) 穴あき円板内のコードについて：

穴あき円板内において2つの穴を結ぶ自己交差をもたない曲線の自然な同値類をコードとよぶ。単純ブレイドは穴あき円板内のコードのまわりの半回転に対応する。よって、コードの研究はブレイド状曲面の不変量の構成などへ応用できる。期間中において、コードの「ダイアグラム」を定義した。これは、コードを、多角形内の何本かの互いに交わらない線分で表したものである。これによって、コード全体の集合を、円板内の穴の数だけ分の非負整数の組(それぞれの穴の上を何回通るかを表した組)を基準に、効率よく求めることが可能になると期待できる。実際、3つの穴があいた円板におけるコードは、3つの非負整数の組により高々1つに決まることを示し、さらにコードを表すための非負整数の間に成り立つ必要十分条件も求めることが出来た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 15 件)

(講演者、講演題目、講演場所、集会の名称、講演日時順)

- ① Yoshiro Yaguchi, Hurwitz action on tuples of simple braids, 大阪市立大学, 第3回 KOOK-TAPU 合同 Seminar, 2011 年 7 月
- ② 矢口義朗, 曲面ブレイドの分類に向けて, 東京大学, リーマン面に関連する位相幾何学, 2011 年 9 月
- ③ Yoshiro Yaguchi, Homological invariants of Hurwitz equivalence on tuples of simple braids, KAIST, The 6th East Asian School of Knots and Related Topics, 2012 年 1 月
- ④ 矢口義朗, Homological invariants of systems of simple braids, 大阪市立大学, Friday Seminar on Knot Theory, 2011 年 11 月
- ⑤ 矢口義朗, Hurwitz equivalence on simple braid systems, 広島大学, 4 次元トポロジー, 2011 年 1 1 月
- ⑥ 矢口義朗, Homological invariants of Hurwitz equivalence on systems of simple braids, 京都大学, 離散群と双曲空間の解析と幾何, 2011 年 12 月
- ⑦ 矢口義朗, Homological invariants of Hurwitz equivalence on braid monodromies, 大阪大学, 阪大トポロジーセミナー, 2011 年 12 月
- ⑧ 矢口義朗, Hurwitz action についての紹介, およびブレイド群の直積への Hurwitz action とその応用, 大阪市立大学, Hurwitz action, 2011 年 1 月
- ⑨ Yoshiro Yaguchi, Homological invariants of Hurwitz action on tuples of simple braids, 南フロリダ大学, AMS, 2011 年 3 月
- ⑩ 矢口義朗, On the extended 1-st Johnson homomorphism of the braid group, 大阪市立大学, Friday Seminar on Knot Theory, 2012 年 7 月
- ⑪ 矢口義朗, ブレイド群の第 1 ジョンソン準同型について, 神戸大学, 神戸トポロジーセミナー, 2012 年 7 月
- ⑫ 矢口義朗, ブレイド群のジョンソン準同形の計算方法について, てんぶす那覇, 2012 琉球結び目セミナー, 2012 年 9 月
- ⑬ 矢口義朗, On simple paths in a punctured disk and their applications

to simple braids, 広島大学, 4 次元トポロジー, 2012 年 1 1 月

- ⑭ 矢口義朗, 穴あき円板内の単純曲線のリストと 2 次元ブレイド不変量への応用, 学習院大学, 学習院トポロジーセミナー, 2012 年 1 2 月
- ⑮ 矢口義朗, Hurwitz action の紹介と単純 2 次元ブレイドの不変量, 群馬大学, Hurwitz action とその周辺, 2013 年 1 月

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://yyaguchi.web.fc2.com/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

なし ()

研究者番号：

(2) 研究分担者

なし ()

研究者番号：

(3) 連携研究者

なし ()

研究者番号：