

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2011 ~ 2012

課題番号：23840028

研究課題名（和文） アーベル多様体に関する有限性とガロア表現の分類について

研究課題名（英文） On a finiteness of certain abelian varieties and a classification of certain Galois representations

研究代表者

小関 祥康 (Yoshiyasu Ozeki)

京都大学・数理解析研究所・研究員

研究者番号：00614041

研究成果の概要（和文）：特殊な性質を持つアーベル多様体の個数の有限性に関する予想の一つである『Rasmussen-Tamagawa』予想を研究し、特別な場合に進展を与えた。より正確には、ガロア表現の法  $l$  表現から元の表現の情報ほどの程度復元できるかを研究し、一定の成果を挙げた。これにより、特別な場合の予想のある種の一般化が正しいことが従う。一方で、ガロア表現を分類する Liu 加群を研究し、その基本的な線形代数的性質を研究した。また、ねじれクリスタリン表現に関する「充満忠実性定理」を証明した。これは Kisin により 2006 年に示された Breuil 予想と呼ばれるもののねじれ表現類似である。

研究成果の概要（英文）：I studied a special case of a conjecture of Rasmussen-Tamagawa, which is related with a finiteness of certain abelian varieties. More precisely, I gave a criterion for two Galois representations of an algebraic number field to be isomorphic when restricted to a decomposition group, in terms of a global representations mod  $l$ . This is applied to prove a generalization of the conjecture. On the other hand, I studied a linear algebraic properties of Liu modules, which classifies certain torsion Galois representations. Furthermore, I studied torsion crystalline representations via Liu modules and obtained a full faithfulness theorem for them. It is a torsion analogue of a Breuil conjecture proved by Kisin in 2006.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2011年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2012年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：アーベル多様体、ガロア表現、Liu 加群

## 1. 研究開始当初の背景

(1) Rasmussen-Tamagawa 予想

2008 年に Rasmussen と Tamagawa により、

代数体上のアーベル多様体の有限性予想が提案された。この予想は代数体が高々2次拡大の場合や、「至る所半安定還元を持ってい

る場合」「定義体上でCMを持つ場合」「GRHを仮定した場合」などの限られた場合にしか証明されていなかった。私は研究開始当初の段階では、この予想を「至る所半安定還元を持つ」場合や「定義体上でCMを持つ」場合に、ガロア表現を用いることで若干の一般化とともに証明をしていた。

## (2) Liu 加群

2010年にLiuによって半安定 $p$ 進表現の格子を分類する新しい線形データとして「Liu加群」が導入された。この加群はこれまでに使われていた多くの線形データたちに必要だった様々な仮定（扱える表現のHodge-Tate重みの上限や、基礎体の絶対分岐指数の上限）が不要という大きな利点を持っていたが、その一方で扱いや計算が非常に困難であるという欠点も持っていた。とくに応用上重要なねじれLiu加群の構造があまり分かっていなかった。Liu加群を用いた応用としては、Hilbert保系形式に付随する局所大域整合性や、ガロア表現の分岐のboundの計算などが知られていた。

## 2. 研究の目的

(1) 上述のRasmussen-Tamagawa予想予想を完全に解決する。

## (2) Liu 加群

ねじれLiu加群の線形代数的性質を整理し、扱いやすくする。また、ガロア表現側への応用を与える。また、ねじれ表現がクリスタリンにいつ持ちあがるかを判定する。

## 3. 研究の方法

### (1) Rasmussen-Tamagawa 予想

予想に関連したアーベル多様体がCMを持つ場合と持たない場合に分けて考察する。CMを持つ場合には「定義体上でCMを持つ場合」に証明した手法を拡張する。この場合、主に障害となるのは扱うアーベル多様体のTate加群が「potentially abelian」になるという点にある。potentiallyではない場合には証明ができていたので、その手法をより精密に考察していく。

一方でCMを持たない場合には、法1表現からもとの表現の情報がどの程度復元できるかを考察することで予想にアプローチをかける。一般には、CMを持たないアーベル多様

体のTate加群は、それに付随する準同型写像の像がある程度大きいものとならなければならない。一方で、Rasmussen-Tamagawa予想に関連したアーベル多様体のTate加群とそれに付随する準同型写像を考えると、それは像の小さいガロア表現と関連付けることができるように見受けられる。この店に注目することで矛盾を導き予想を証明するという流れを採用していく。

## (2) Liu 加群

まずは階数2のねじれLiu加群の構造から調べる。Liu加群は「Kisin加群」に、あるガロア群による付加構造を持つものなので、まずKisin加群を調べる必要がある。これはある程度既に知られているので、それらの結果を軸にLiu加群を調べる。また同時に、Liu加群側からガロア表現のコホモロジーを構成する方法を調べる。これを計算することができれば、階数2のねじれLiu加群のExtensionなども計算できるはずである。一方で、ねじれ表現がクリスタリン表現に持ちあがるか否かをエタールLiu加群を用いて考察する。エタールLiu加群とは、Liu加群と深い関係を持ちつつ、Liu加群に比べると計算がしやすいものである。まずは2次元法 $p$ 表現がいつクリスタリンに持ち上がるかということから調べ、それをモデルケースとして一般次元の法 $p$ 表現がいつクリスタリンに持ち上がるかの判定方法を模索する。

## 4. 研究成果

### (1) Rasmussen-Tamagawa 予想

九州大学の田口雄一郎氏との共同研究により、法1表現から元のガロア表現の情報がどの程度復元できるかということに関しては一定の成果を得ることができた。もう少し正確に言うならば、特定の性質を持つ代数体上の二つのガロア表現の法1表現たちが、1上の素点 $u$ の分解群と1上にはない素点 $v$ の分解群に制限した際に半単純化が合同であったとしたとき、 $v$ の下の素数に対して1が十分大きいならば、 $v$ の分解群の表現として元々の二つのガロア表現の半単純化が合同になるという結果を得ることができた。応用として、「特定の拡大で半安定表現を持つアーベル多様体」に関する

Rasmussen-Tamagawa予想が直ちに従うことがわかる。更に、保型形式のフーリエ係数が

法 1 で特殊な条件を持つことは極めて珍しいといった応用も得ることができた。今回の研究では、主にガロア 表現を用いて研究したことにより、本来の Rasmussen-Tamagawa 予想以上の結果を部分的に得ることができた。またそれだけでなく、一見すると Rasmussen-Tamagawa 予想とは何の関係もないような結果を得ることができたということも大きな成果、特徴といえる。実際、上述の保型形式への応用などは、アーベル多様体を考えていただけでは決して得られなかった結果であると考えられる。このように、本研究は今後、Rasmussen-Tamagawa 予想の背後にあるより一般的な現象の考察に影響を与えるものと期待される。

## (2) Liu 加群

Liu 加群に対応するガロア表現がクリスタリンになるための必要条件が Gee-Liu-Savitt によって近年与えられていたが、それが十分条件であることを示した。また、ねじれクリスタリン表現に対応すべき Liu 加群の圏を考えることにより、ねじれクリスタリン表現に関するある種の充満忠実性定理を示すことができた。これが本研究における最も大きな成果と言える。この充満忠実性定理は、有限平坦群スキームに付随するガロア表現に関しては Breuil により 2000 年の段階で既に知られていた。これは Hodge-Tate 重みが 1 以下のねじれクリスタリン表現に関する結果である。本研究結果はより大きな Hodge-Tate 重みに対しても充満忠実性が成り立つことを主張しており、Breuil による結果の純粋な一般化となっている。一方で、本研究で得られた充満忠実性定理にはある仮定がついているのだが、その仮定が充満忠実性定理にとってほとんど「sharp」なものであることを確認することもできた。

この結果を応用することで、特定のねじれ表現が「小さい Hodge-Tate 重みを持つクリスタリン表現には持ちあがらない」という結果を得ることができた。本来の本研究の目的は「ねじれ表現がクリスタリンに持ちあがるかの判定」であった。しかし今回の研究で得られた結果は逆に「持ちあがらない」に関連したものであり、一つの興味深い結論を得ることができたといえる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 10 件)

- ① Yoshiyasu Ozeki, Full faithfulness theorem for torsion crystalline representations, KIAS 整数論セミナー 2013, 2013 年 3 月 27 日, Korean Institute or Advansed Study (韓国)
- ② Yoshiyasu Ozeki, Full faithfulness theorem for torsion crystalline representations, 九州代数的整数論 2013, 2013 年 2 月 11 日, 九州大学
- ③ Yoshiyasu Ozeki, Full faithfulness theorem for torsion crystalline representations, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学
- ④ Yoshiyasu Ozeki, ねじれクリスタリン表現の充満忠実性定理について, 第 7 回福岡数論研究集会, 2012 年 8 月 8 日, 九州大学
- ⑤ Yoshiyasu Ozeki, Torsion representations arising from  $(\phi, \text{Ghat})$ -modules, Industorious Number Theory4, 2012 年 2 月 18 日, Kyungpook National University (韓国)
- ⑥ Yoshiyasu Ozeki, Torsion representations arising from  $(\phi, \text{Ghat})$ -modules, East Asia Number Theory Conference, 2012 年 1 月 17 日, National Taiwan University (韓国)
- ⑦ Yoshiyasu Ozeki,  $(\phi, \text{Ghat})$  加群に付随する torsion 表現について, 代数的整数論とその周辺 2011, 2011 年 12 月 1 日, 京都大学
- ⑧ Yoshiyasu Ozeki, Torsion representations arising from  $(\phi,$

Ghat)-modules, 慶應義塾大学代数セミナー, 2011年11月21日, 慶應義塾大学

⑨ Yoshiyasu Ozeki, Torsion representations arising from  $(\phi, \text{Ghat})$ -modules, Workshop on arithmetic geometry 2011, 2011年10月10日, 沖縄尚学高等学校

⑩ Yoshiyasu Ozeki, Cartier duality for Liu modules, 広島仙台整数論集会, 2011年7月22日, 広島大学

[図書] (計0件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yozeki/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小関 祥康 (Yoshiyasu Ozeki)

京都大学・数理解析研究所・研究員

研究者番号 : 00614041