

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 14 日現在

機関番号：32606

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2011 ～ 2012

課題番号：23840034

研究課題名（和文） レーザー光を用いて実現する新しい種類の極低温原子気体に関する理論的研究

研究課題名（英文） Theoretical study of the new phenomena of the ultra-cold atom gases with laser field

研究代表者

高橋 雅裕 (TAKAHASHI MASAHIRO)

学習院大学・理学部物理学科・助教

研究者番号：00613697

研究成果の概要（和文）：レーザーで作られた準周期ポテンシャル中の原子気体についてクリティカル状態が見出せることを理論的に示した。また、複数バンドを持つ超伝導体で秩序変数が空間変化する FFLO 状態が新しく複数の相に一次転移的に移ることを解明した。

研究成果の概要（英文）：It is theoretically showed that the critical states of the atomic gases exist under the quasi-periodic potential made by the laser field. The FFLO states in which the order parameters of the superconductivity modulate in space are studied in multi-band superconductors. The new phases of the FFLO states are predicted via 1<sup>st</sup> order transitions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2011 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2012 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：原子・分子・量子エレクトロニクス

キーワード：ボーズ・アインシュタイン凝縮、超流動、準周期、非線形シュレディンガー方程式、マルチバンド、超伝導、FFLO

## 1. 研究開始当初の背景

近年の極低温原子気体における実験技術の発展は目覚ましいものがある。特に、原子気体を捕獲するトラップポテンシャルに加えて、更に外部から波数の比が無理数になるような 2 本のレーザー光を照射して順周期系を作ることが実際に行われている。一方、さらにホログラフィーの技術を用いれば、任意のポテンシャルを作ることが可能であり、そのような実験が実際に始まったところである。後者のホログラフィーの方法を用いれば、これまで、鉄系合金でしかも 1 次元にマップすることによってしか実現されていなか

った Fibonacci 格子の実現も可能であると考えた。Fibonacci 格子というのは、数学の Fibonacci 数列を作るときのルールでポテンシャルの強弱を決めた準周期ポテンシャルである。順周期ポテンシャルの下ではタイト-バインディングモデルと呼ばれる近似の下で、クリティカル状態が実現されるという理論的な結果がある。極低温原子気体では、平均場近似の下で得られるグロス-ピタエヴスキー方程式を離散格子点上で考えた物がこれと対応し、さらに粒子間相互作用を制御できるという点が固体物質の系と異なる点である。この相違により粒子間相互作用を考慮

した研究が必要であり、それによるクリティカル状態の安定性に興味があった。

一方、極低温原子気体の系と、固体物質の系は色々な違いはあるものの、超流動状態と超伝導状態のような理論的には同様の議論が可能なのがある。後半の研究では、超伝導状態において複数バンド、具体的に扱ったのは2つのバンド、において超伝導がどのような相に分割されるかを調べた。バンドが複数あるような系は原子気体の系では、複数の粒子種または超微細スピン状態を用いれば可能になり、この研究の成果は相互に流用できる。複数バンドの存在は超伝導体の方で存在が近年確かめられていて、高磁場における振る舞いに興味があった。高磁場は原子気体の系では、粒子数比を大きくすることに対応している。高磁場において、秩序パラメーターが空間変化するFFLO状態が存在することが単バンドのときには理論的に提案されているが、複数バンドのときに果たしてどうか、ということに興味があった。

## 2. 研究の目的

一次元光格子中の準周期ポテンシャルの下でクリティカル状態の存在を明らかにすること。特に、粒子間相互作用、つまり平均場の下では密度に関する非線形項が入ったときにどのようにクリティカル状態が壊されるか、または、存在することができるのか、理論的に明らかにする。

複数バンドを持つ超伝導体において、高磁場でFFLO状態が複数バンドの効果でどのように変化を受けると、または、受けないかを明らかにする。

## 3. 研究の方法

本研究費で購入した数値計算専門の高速計算機を用いて、数値計算による研究を行う。

前半は、ディリクレ境界条件のもと、シュレーティング法という方法を用いて、非線形シュレディンガー方程式を解く。系を系統的に大きくして、無限極限を取ることで、クリティカル状態の存在/非存在を明らかにする。

後半は、微視的ハミルトニアンから平均場近似で得られるボゴリューボフ・ジャン方程式を複数バンドに拡張した物を数値的に解く。磁場・温度それぞれをパラメーターとし、自己無撞着解が得られるまで計算し、相図を完成させる。

## 4. 研究成果

まず、準周期系の問題に関する成果は以下

である。高速の計算機の特徴を活かして、精度のよい計算を行うことで、ほぼ全てのエネルギー固有値を得ることができた。図1では横軸をエネルギー固有値、縦軸を粒子間相互作用、つまり非線形項の強さにとり、グラフを描いた物である。 $g=0$ では、エネルギー固有値の集合は連続でも、ポイントでもない、シンギュラー・コンティニュアスというものになることが分かっている、もちろんそれを再現している。そこから、

図1: 粒子間相互作用の大きさ  $g$  によるエネルギー固有値の変化。 $g=0$ でエネルギー固有値の集合はシンギュラー・コンティニュアスになることが分かっている。 $g$ が大きくなると非線形効果により、ソリトンのエネルギー固有値が現れる。(M. Takahashi, *et al.*, *New J. Phys.* **14**, 113012 (2012))

有限の相互作用  $g$  を入れることによって、エネルギー固有値の値は変化するが、 $g$  に対して連続的に変化していることが分かる。さらに、非線形項により、固有値の制限がなくなり、新たな固有値が出現している。新しく出現したエネルギー固有値の状態は、図2(d)のような局在状態を含んでいることが分かった。これらは、局在状態であるので、固有値の集合が点スペクトルになると考えられる。

固有値の変化を見ただけでは、状態がクリティカル状態であるかどうかは分からない。よって、図3に示すように、マルチフラクタル解析を行った。マルチフラクタルとは、フ

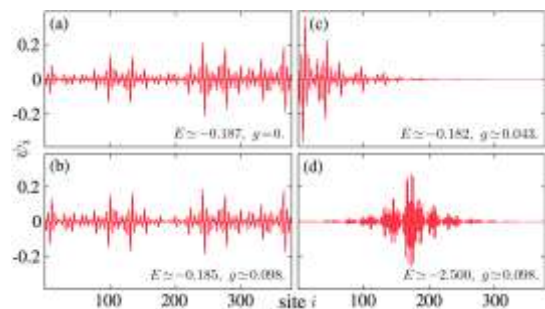
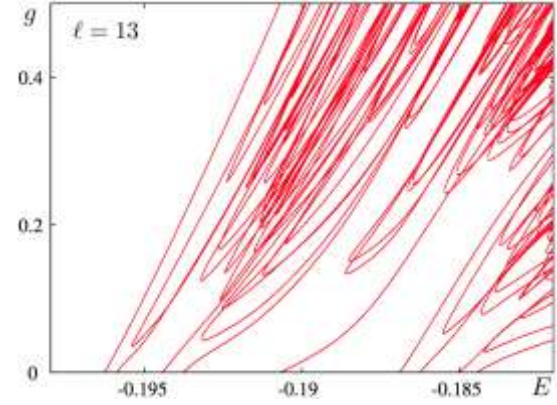


図2: オーダーパラメーターの空間変化。(a) クリティカル状態 ( $g=0$ )、(b) クリティカル状態 ( $g \neq 0$ )、(c) サーフェイス状態、(d) 局在状態。(M. Takahashi, *et al.*, *New J. Phys.* **14**, 113012 (2012))

ラクタルで考えられるスケーリングが色々な測度で実現されているもので、フラクタルの一般化である。クリティカル状態は秩序パラメーターの振幅について、このマルチフラ



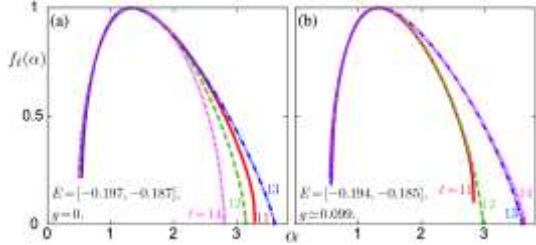


図 4 マルチフラクタル解析の結果。(a)  $g=0$ 、(b)  $g \neq 0$ 。  $\alpha$  はスケーリングの測度であり、  $f$  はそのスケーリング指数である。(M. Takahashi, *et al.*, New J. Phys. **14**, 113012 (2012))

クタル状態が実現しており、数学的にも非常に面白い対象である。マルチフラクタル解析は、測度  $\alpha$  とそのスケーリング  $f$  の計算によって示すことができる。系のサイズを系統的に大きくした際、有限の  $\alpha$  で  $f$  が滑らかに存在していれば、さまざまな測度  $\alpha$  でのスケーリング、つまりマルチフラクタル性があるということが言える。図 3 (b) にあるように、有限の  $g$  の下でもこれがあることから、粒子間相互作用があってもクリティカル状態が存在し続けることが数値的に明らかにされた。

さらに、系の長さが無限の極限を取った場合の議論を数学的な手法で行った。特に重要なのは、無限系まで議論を拡張させると、任意の有限な  $g$  において、エネルギー固有値の集合がシンギュラー・コンティニュアスになることが証明できたことである。また、エネルギー固有値と粒子間相互作用の二次元平面上でエネルギー固有値が存在しない領域があることが分かり、これは、実験的に検証する際よい足がかりになると期待される。まとめると、この研究において、準周期ポテンシャル中でのクリティカル状態は粒子間相互作用の有無に関わらず存在するという

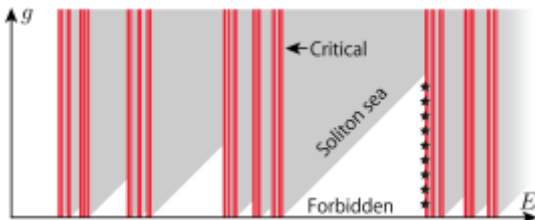


図 3 無限系での、エネルギー固有値の粒子間相互作用  $g$  依存性。赤色がクリティカル状態のエネルギー固有値で、シンギュラー・コンティニュアスとなる。また、グレーのところに局在状態のスペクトルが出現する可能性がある。白色のところは状態が存在し得ない。(M. Takahashi, *et al.*, New J. Phys. **14**, 113012 (2012))

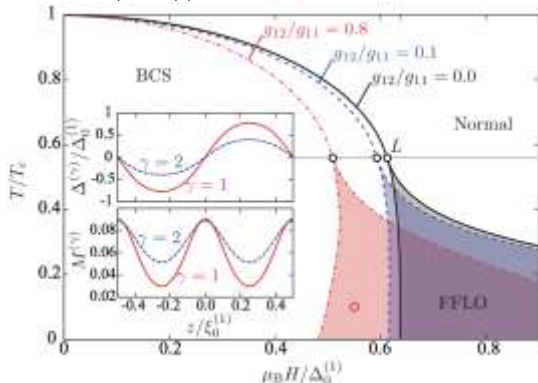


図 5: シングルバンド + 粒子浴の場合の相図。  $g_{12}/g_{11}$  がバンド 1 とバンド 2 の相互作用の強さを表す。バンド間相互作用が大きくなるにつれて、FFLO 領域が大きくなる。

驚くべき結果が得られた。これは物理的にも興味深い、数学的にも面白い提案であり、今後の研究への発展性もあると考えている。

次に、多バンドの超伝導体における FFLO 状態について研究して得られた成果を説明する。

今回は、多バンドの中でミニマルモデルである、2 バンドの系について、ボゴリューボフ・ジャン方程式を数値的に解いて、低磁場で実現する BCS 状態と FFLO 状態の熱力学ポテンシャルを比較することで、その安定性を調べた。磁場はもちろん、温度も変化させ、磁場温度相図を得ることができた。

まず、2 番目のバンドはそれ自身だけでは超伝導状態にならないようにバンド内相互作用をゼロにした。これにより、この系は、シングルバンド + 粒子浴という系になる。この場合に得られた相図が図 5 にある。これは、バンド間の相互作用を変えていった結果である。  $g_{12}/g_{11}$  の値がバンド間相互作用の強さを表し、バンド間相互作用が大きくなると FFLO 領域が低磁場にシフトし、その領域が広がっていることが分かる。

次に、バンド 2 も自発的に超伝導になる場合を考えた。この場合に得られた相図が、図 6 および 7 である。これらの相図の違いは、化学ポテンシャルや、相互作用の強さなど、パラメーターである。図 6 では、低温において、  $Q_1$ -FFLO (高磁場) と  $Q_2$ -FFLO (低磁場) に一次転移で移行するが、少し高温になるとその区別は曖昧で、一つの FFLO として実現する。いずれにしても、FFLO と BCS の境界線の傾きは高磁場側に膨らんでおり、FFLO 領域が広がっていることが分かる。

図 7 では、  $Q_1$ -FFLO と  $Q_2$ -FFLO の境界線は全領域ではっきりしており、一次転移であることを確かめた。また、  $Q_2$ -FFLO においては、内部でさらに複数の相に分かれていることが分かり、それらは無限にあると予想する。そのために、FFLO 領域の低磁場における秩序パラメーターの空間変化、磁化の変化、それらのフーリエ成分を図 8 に示す。(a#) は

$Q_1$ -FFLO を示し、バンド 1 とバンド 2 がそれぞれ同じ周期で振動しているのが分かる。磁化は、秩序パラメーターをポテンシャル壁と感じるので、そのノードに集中するように現れる。(b#) と (c#) は少し様相が違

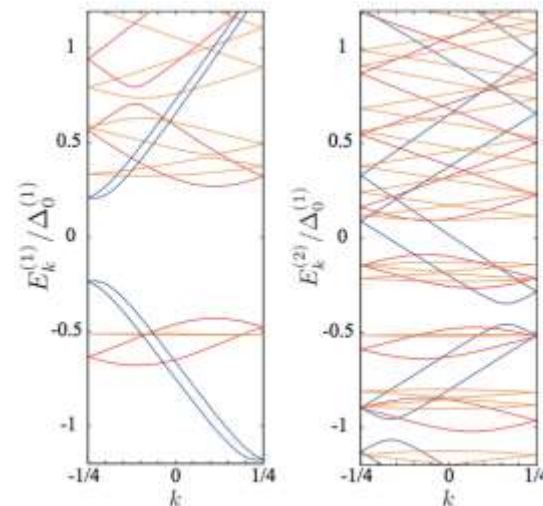


図 6: エネルギースペクトル。左側がバンド 1 のもの、右側がバンド 2 のもの。青色が高磁場、赤色が中間、オレンジ色が低磁場に対応し、高磁場では  $Q_1$ -FFLO が、中・低磁場では、  $Q_2$ -FFLO が実現する。

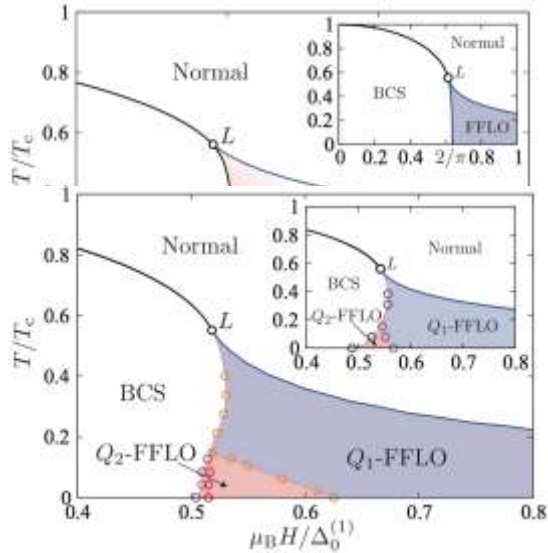


図 9:2 バンド超伝導体の磁場-温度相図。大別すると 2 つの FFLO 状態得られ、さらに低磁場の FFLO 状態は、無数の FFLO 状態に分割される。

う。より低磁場なのが (c#) であるが、一つの大きな周期の中に、小さな周期が存在している。特にこの周期が (b#) → (c#) となるにつれ倍になっていることが分かる。フーリエ成分を見るとより明らかで、高い振動数の波の成分を見ることが出来る。これは、2 つのバンドがそれぞれ別の長さスケールを持つためだと解釈した。つまり、それぞれのバンドが異なる特徴的長さを持つが、これらは周期的境界条件の下、同時に存在することができず、その競合により FFLO の振動波数が決定される。そのため、バンド 2 において、離散的に振動数を増やすことになる。

ところで、バンド 2 において振動数を増やすことにどういう意味があるかを考えると、図 9 のバンド構造を見てやると理解することができる。バンド 1 のバンド構造はどれもさほど違いはない。一方で、バンド 2 においては、 $Q_2$ -FFLO においてフェルミエネルギー ( $E = 0$ ) にギャップが空いている。つまり、バンド 2 はギャップを空けることで、凝縮エネルギーの利得を得ているのである。これにより、低磁場においても FFLO 状態を安定化させ、ついには FFLO 相の拡大に繋がったのである。

各相が一次転移になるのにも理由がある。上のような理由により、バンド 2 の方の振動は不連続にしか入ることができない。よって、一次転移にならざるを得ないのである。さらに面白いことに、数値的に確認することは難しいが、このような一次転移で変化するような相は更に低磁場になるにつれて無数に存在することが可能である。これは、物理的観点から見た悪魔の階段であり、非常に興味深い。2 つのスケールがあることで悪魔の階段がその波数に関する有理数の比だけ、無限個得られるのである。

まとめると、この研究により、マルチバンドの一つである、2 バンドの超伝導体において、FFLO 領域が安定に存在し、かつそ

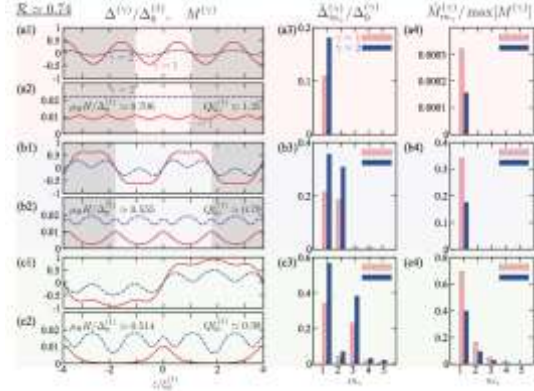


図 7: 秩序パラメータの空間構造(\*1)、磁化の空間構造(\*2)、秩序パラメータのフーリエ成分(\*3)、磁化のフーリエ成分(\*4)。(a#) → (b#) → (c#) の順に高磁場から低磁場。絶対零度。

の領域が広がること、さらには、一次転移によってそれらが結びつけられていることを解明した。また、それらの一次転移は低磁場に行くに従っていくらでも可能で、物理的観点での悪魔の階段に相当する。この結果は、原子気体の系でももちろん適用可能で、多数の粒子種または、超微細スピン状態を用い再現することができる。実験では FFLO 相の明確な発見はまだないので、この研究により発見へ向けての足掛かりになると期待する。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

M. Takahashi, H. Katsura, M. Kohmoto, T. Koma,  
Multifractals Competing with Solitons on Fibonacci Optical Lattice,  
New Journal of Physics、査読有、14、2012、113012

DOI: 10.1088/1367-2630/14/11/113012

[学会発表] (計 7 件)

高橋雅裕、桂法称、甲元真人、高麗徹、  
Fibonacci 格子上的極低温原子気体の数値解析、  
日本物理学会 2011 年秋季大会、2011/09/21、  
富山大学、富山  
高橋雅裕、桂法称、甲元真人、高麗徹、  
Multifractals in Soliton Sea、  
Ultracold Gases: Superfluidity and Strong Correlations (USS-2012)、2012/01/11、東京理科大学、東京  
Masahiro Takahashi、Hosho Katsura、Mahito Kohmoto、Tohru Koma、  
Multifractals in Soliton sea on Fibonacci Lattice、  
APS March meeting 2012、Boston、USA  
M. Takahashi、  
Robust Critical States Appear in UltraCold

Atom Gases,  
The 23<sup>rd</sup> International Conference on Atomic  
Physics, 2012/07/23-2012/07/27, Palaiseau,  
France

高橋雅裕、  
2バンド超伝導体における FFL0 領域の拡大、  
日本物理学会 2012 年秋季大会、  
2012/09/18-2012/09/21、横浜国立大学、神  
奈川県

M. Takahashi、  
Multiple Phase Transition of the  
Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov States  
in two-band Superconductors、

APS March meeting 2013 、  
2013/03/18-2013/03/22, Maryland, USA

高橋雅裕、  
2バンド超伝導体における FFL0 多重相転移、  
日本物理学会 2013 年年次大会、  
2013/03/26-2013/03/29、広島大学、広島県

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高橋 雅裕 (TAKAHASHI MASAHIRO)

学習院大学・理学物理学科・助教

研究者番号：00613697