

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 3月31日現在

機関番号：32612

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2011～2012

課題番号：23840036

研究課題名（和文） 非可逆な非勾配型の系に対するスケール極限の研究

研究課題名（英文） Scaling limits for non-reversible and non-gradient systems

研究代表者

佐々田 慎子 (SASADA MAKIKO)

慶應義塾大学・理工学部・助教

研究者番号：00609042

研究成果の概要（和文）：ランダムなノイズのある一次元調和振動子鎖に対する平衡揺動の研究を行い、時空間変数に対する拡散型のスケール極限としてマクロなエネルギー揺動の従う確率微分方程式を導出した。また、様々な確率モデルに対する Spectral gap の詳細な評価の新しい手法を得た。

研究成果の概要（英文）：We study the energy diffusion in a chain of an-harmonic oscillators where the Hamiltonian dynamics is perturbed by a local energy conserving noise. We prove that under diffusive rescaling of space-time, energy fluctuations diffuse and evolve following an infinite dimensional linear stochastic differential equation driven by the linearized heat equation.

We also develop some techniques to obtain a sharp estimate of the spectral gap for various types of stochastic processes.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			0
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：流体力学極限、揺動問題、非勾配型

1. 研究開始当初の背景

本研究は、統計物理学に数学的な基礎づけを与えることを目標として始まった、確率解析を用いた大規模相互作用系に関する一連の研究を背景とするものである。

統計物理学は、流体や気体等の巨大な自由度を持つ系のマクロな熱力学的性質の時

間発展を、原子や分子等のミクロなレベルの力学的運動法則から説明する学問である。統計物理学において、エルゴード仮説や局所平衡等いくつかの重要な仮定があるが、これらを一般の決定論的なモデルに対し数学的に厳密に証明することはほとんど不可

能と考えられている。そこで、決定論的でない確率過程をマイクロモデルとする研究が盛んに行われ、統計物理学の考え方を数学的に基礎づける様々な手法が確立されてきた。こうした確率解析に基づく大規模相互作用系の研究は、国内外で非常に広く行われており、現在も盛んに研究されている。特に系に時間発展のある非平衡状態の研究については、非平衡統計物理学そのものが未完成であり、数学的基礎付けにとどまらず非平衡統計物理学そのものを発展させていくと期待されている。

マイクロな系を与える確率モデルから、そのマクロな性質を導出する重要な手法がスケール極限である。より具体的には、マイクロな系の時間発展を表す確率過程を、時間と空間について適切なオーダーの比でスケール変換し、そのスケールパラメータに極限操作を行うことで、マクロなパラメータの時間発展が従う偏微分方程式を導くことが本研究分野の重要な目標である。この過程は、標語的に流体力学極限と呼ばれる。これは、一種の大数の法則である。この大数の法則に付随し、その周りでの揺らぎを調べる揺動問題も重要なテーマである。マイクロな系の時間発展を表す確率過程の揺らぎを、適切にスケール変換し極限操作を行うことで、マクロなパラメータのゆらぎが従う確率偏微分方程式を導出するのが、揺動問題の目標である。

流体力学極限や揺動定理を証明する際、そのモデルが勾配条件と呼ばれる強い条件を満たすか否かにより、証明の難易度が大きく異なる。勾配条件を満たす勾配型と呼ばれる系に対しては、すでに Guo-Papanicolaou-Varadhan が導入したエントロピー法など、一定の手法が確立されている。一方、勾配条件を満たさない非

勾配型モデルの流体力学極限の証明には、非常に複雑な多くのステップが必要とされ、さらに現在知られている手法では、各モデルに依存した評価、議論が不可欠な部分がある。そのため、非勾配型モデルの流体力学極限の研究はいまだ発展途上である。しかし一方で、物理的に興味深い系のほとんどが非勾配型であり、現実の物理現象の理解のためには、非勾配型モデルについて研究することが不可欠である。

研究代表者の佐々田はこれまで、この非勾配型モデルのスケール極限の手法を拡張し、いくつかの興味深いモデルに応用することに成功してきた。特に、速度をもつ粒子の単純排他過程、およびランダムなノイズをもつ次元非調和振動子鎖が定める時間発展は、非可逆マルコフ過程となり、スケール極限の証明には、非勾配型であることによる困難に加え、さらにこの非可逆性による困難が伴う。非可逆な非勾配型の系に対するスケール極限の証明には **sector condition** と呼ばれる不等式が鍵となる。佐々田は、この不等式の証明に、これまで用いられてきた手法ではなく、モデルが持つ対称性を利用した平易な手法が使えることを示した。そこで、この手法を応用し、様々なモデルに適用しようと考えたことが、本研究の着想に至った経緯である。

2. 研究の目的

非平衡統計力学における最も重要な課題の一つに、ハミルトン系で与えられたマイクロモデルから、拡散型スケール変換のもとでのスケール極限により熱拡散方程式を導出することがある。この導出を数学的に厳密に行うため、ハミルトン系に確率的なノイズ項を加えたモデルを考え、そのスケール極限を研究することを本課題のテーマの

柱の一つとした。ハミルトン系で表される力学系は、一般に位置と速度（運動量）を変数とするため、非可逆なモデルになる。速度の情報が非可逆性をもたらすのである。また、変数は連続な値をとるために非常に特殊な場合を除いて、非勾配型になる。このように、非可逆な非勾配型となるランダムなノイズ項をもつハミルトン系に対する拡散型スケール変換のもとでのスケール極限の厳密な証明はこれまで与えられていなかった。そこで、本研究では、これまでに得られた非可逆な非勾配型の格子気体モデルに対する手法を応用し、ランダムなノイズ項をもつハミルトン系に対するスケール極限を研究し、熱拡散方程式を導出する手法を確立することを目指した。マイクロモデルを構成する各粒子が速度をもつような系は必然的に非可逆になり、また物理的に自然なモデルのほとんどが非勾配型であるため、本研究によりこうしたモデルのマクロな性質が厳密な手法を通して明らかになることは、数学的にはもちろん物理的にも非常に意義のあることである。

3. 研究の方法

(1) 非勾配型の系に対するアプローチ

非勾配型の系に対するスケール極限の証明の基本的な手法は、Varadhan により導入された **non-gradient method** である。この手法は、可逆な **Ginzburg-Landau** モデルに対する流体力学極限の証明として導入され、その後様々な可逆な格子気体モデルに対し適用できることが示された。流体力学極限や揺動定理の成立が検討されるモデルの代表例は、格子気体モデルである。格子気体モデルでは、マイクロな系の運動法則は、相互作用する粒子の格子空間上のランダムウォークとして記述され、その時間発展は、格子空間上の粒子の配置の時間発展

として表される。

ランダムウォークから定まる格子気体モデルとハミルトニアンから定まるモデルとの大きな違いは、変数が離散的な値をとるか連続な値をとるか、という点である。離散的な値をとる格子気体モデルに対する先行研究は可逆な非勾配型モデルに対しては、ある程度豊富にあるが、連続な値をとる場合には可逆な系に対してであっても、先の **Varadhan** の結果を含む限られたものしかない。変数が離散的な値をとる格子気体モデルに対しては問題なく行われている証明のいくつかのステップが、変数が連続な値をとるモデルでは慎重なチェックを要するため、元々非常に複雑な非勾配型の系に対する証明が、よりいっそう長く込み入ったものとなる。この複雑な証明を、少しでも簡潔で物理的な意味づけもわかりやすいものへと改良しながら、具体的な系への応用を行った。

ランダムなノイズを持つハミルトン系に対する証明の難しさのもう一つ原因は、系のマクロなパラメータを与える保存量（エネルギー）が、マイクロな物理量の非線形な関数となっている点である。これは、**Ginzburg-Landau** モデルと異なっており、このためにさらなる技術的困難がともなっている。これを克服する手法も、いくつかの具体的なモデルに対しては既に結果を得ているので、それらを手がかりに、より一般的な手法を明らかにした。

(2) 非可逆な系に対するアプローチ

もともと可逆な非勾配型の系を対象として導入された **non-gradient method** を非可逆な系に拡張するためには **sector condition** と呼ばれる不等式が鍵となる。この **sector condition** を用いた流体力学極限の証明はいくつかの格子気体モデルでの

み示されており、**sector condition** は、ミクロモデルを構成する粒子のランダムウォークの平均が0という性質を利用して証明されてきた。そのため、格子気体モデル以外では同様の手法を用いることはできなかった。佐々田は、一次元格子空間の速度をもつ単純排他過程の研究の中で、この不等式の証明に、モデルの対称性を利用した平易な手法が使えることを示した。このモデルの対称性を利用する方法は、ランダムなノイズを持つハミルトン系を含む非常に広いクラスのモデルに適用できると考えられるので、その手法を用いて新しい系に対するスケール極限の証明を行っていった。

(3) 具体的なモデルの研究

①ランダムなノイズのある一次元調和振動子鎖

ランダムなノイズを持つハミルトン系の具体例として、まずはランダムなノイズのある一次元調和振動子鎖に対する平衡揺動の研究を行った。一次元調和振動子鎖は熱拡散等のモデルとして最もシンプルかつ重要な系として様々な分野で非常によく研究されているモデルである。そして、このモデルに対する証明を通して、**non-gradient method** の本質をわかりやすく簡潔にする試みも進めた。

②速度をもつ単純排他過程

佐々田が、非可逆な非勾配型モデルとして最初に取り組んだ具体的なモデルが一次元格子空間上の速度をもつ単純排他過程である。このモデルは非勾配型かつ非可逆であるが、それ以外にも物理的に重要な様々な性質を持つ。このモデルは、各粒子の速度の符号の変わりやすさを表す正值のパラメータ γ により特徴づけられ、 γ を ∞ とした極限として対称単純排他過程、 γ を0と

した極限として非対称単純排他過程、というそれぞれよく知られたモデルが形式的に得られる。佐々田はこの点に着目し、極限方程式として得られる非線形拡散方程式の拡散係数の、パラメータ γ に対する漸近的な挙動をすでに研究した。この結果、ミクロモデルの漸近的な関係性が、マクロなパラメータの発展方程式としてもやはり再現されることが既にわかっていたが、さらに、この極限付近でのふるまいが、次元により異なることを示した。

(4) Spectral gap の研究

非勾配型の系に対するスケール極限の証明に用いられる **non-gradient method** において、ミクロな系の時間発展を定める確率過程の生成作用素の **Spectral gap** を精密に評価することが、不可欠である。しかし、この **Spectral gap** の評価について十分に一般的な手法は知られていない。そこで、本研究では非勾配型の系に対するスケール極限の証明の重要なステップとして、特に **Spectral gap** の評価の手法について詳細に研究を行った。

4. 研究成果

佐々田は、パリ第9大学の **Stefano Olla** 教授とともに、ランダムなノイズのある一次元調和振動子鎖に対する平衡揺動の研究を行い、極限の確率微分方程式の導出に成功した。本結果は、ハミルトン系に由来する非勾配型モデルに対する初めてのスケール極限の厳密な証明である。既にこの結果を論文としてまとめ投稿し、すでに掲載が決定している。

また、一次元の場合の速度をもつ単純排他過程に対する流体力学極限の証明をまとめたものを論文として投稿した。本結果はすでに

掲載されている。

さらに Spectral gap の評価として、多種粒子系の場合にこれまでに知られていた結果を大幅に拡張する結果を得た。これは大阪大学（当時）の永幡氏との研究による。多種流粒子系では、粒子数一定の状態空間が必ずしもマルコフ過程の既約な部分集合とはならないことも様々な具体例とともに明らかにした。本結果も既に論文誌に掲載されている。

Spectral gap の評価に関しては、モデルに依存しない一般的な手法の拡張も行った。Caputo によって導入されたモデルに依存しない非常に斬新な Spectral gap の評価の手法を大幅に拡張し、より様々なモデルに適用できるようにした。特に、Caputo の結果は mean-field type と呼ばれる全ての粒子間に相互作用のあるモデルにのみ適用できたが、佐々田はこれをより物理的に自然な nearest-neighbor type と呼ばれる隣接する粒子間のみ相互作用が起こるモデルにも適用できるように拡張した。本結果も既に論文誌に掲載されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

1. Macroscopic energy diffusion for a chain of anharmonic oscillators, Stefano Olla, Makiko SASADA, Probability theory and related fields, 掲載決定
2. On the spectral gap of the Kac walk and other binary collision processes on d-dimensional lattice, Makiko SASADA, Symmetries, Integrable Systems and Representations, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, University of Tokyo, V.40/P.543-560, 2013
3. Spectral gap for multi-species exclusion processes, Journal of Statistical Physics, Yukio NAGAHATA, Makiko SASADA, 14 3巻2号, 381-398, 2011

4. Hydrodynamic limit for exclusion processes with velocity, Makiko SASADA, Markov processes and related fields, 17巻3号, 391-428, 2011

[学会発表] (計 9 件)

1. ハミルトン系と流体力学極限, 佐々田 槇子, 城崎新人セミナー, 兵庫県豊岡市 城崎総合支所, 2013年2月20日
 2. Mixing rates of stochastic energy exchange models with degenerate rate functions, Makiko SASADA, Nonequilibrium Statistical Mechanics, Mathematical Understanding and Numerical Simulation, Banff International Research Station, 14 November 2012, Canada
 3. Makiko SASADA, Microscopic dynamics for the porous medium equation and other degenerate parabolic equations, MSJ-KMS Joint Meeting 2012, 17 September 2012, Centennial Hall, Kyushu University Medical School
 4. Makiko SASADA, Stochastic energy exchange models with degenerate rate functions, International Congress on Mathematical Physics ICMP2012, 9 August 2012, Aalborg, Denmark
 5. 佐々田槇子, 退化放物型方程式の流体力学極限による導出, RIMS共同研究 異常拡散の数理, 2012年7月19日, 京都大学数理解析研究所
 6. Makiko SASADA, Spectral gap for stochastic energy exchange models with degenerate rate functions, 11th Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 5 July 2012, The University of Tokyo
 7. 佐々田槇子, Kac walk とその他のbinary collision process に対するスペクトルギャップについて, 数理物理と確率解析, 2012年3月12日, 湘南国際村センター
 8. 佐々田槇子, Kac walk とその他のbinary collision process に対するスペクトルギャップについて, 新潟確率論ワークショップ, 2012年1月29日, 新潟大学
 9. Makiko SASADA, Spectral gap for energy exchange models with rate functions approaching zero, 10th Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 5 December 2011, Kochi University
6. 研究組織
(1) 研究代表者

佐々田槿子 (SASADA MAKIKO)
慶應義塾大学・理工学部・助教
研究者番号：00609042

(2) 研究分担者
該当なし

(3) 連携研究者
該当なし