様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 31 日現在

機関番号：３２６４２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2011～2012
課題番号：２３８４００３７
研究課題名（和文）　非線形シュレディンガー方程式における定在波の安定性解析

研究課題名（英文）Stability analysis of standing waves for nonlinear Schrodinger equations

研究代表者
菊池　弘明（KIKUCHI HIROAKI）
津田塾大学・学芸学部・講師
研究者番号：00612277

研究成果の概要（和文）：
平成 23 年度に行った研究は二つある。一つは、調和ポテンシャルを伴う非線形楕円型方程式の特異解を調べた。ここで、非線形項はべき剰型で、そのべきの指数はソボレフ超臨界のものを考える。既に特異解の存在は分かっていたが、その特異解のプロファイルを用いて、一意性を示すことが出来た。もう一つは、ソボレフ臨界指数を含む非線形シュレディンガー方程式を調べた。具体的には、まず、基底状態が存在を示した。その基底状態を用いて H^{1}の部分集合を 2 つ定義し、一方から出発した解は、(有限又は無限時間）で爆発し、他方から出発した解は散乱することを示した。

平成 24 年度は、一般の非線形項における非線形シュレディンガー方程式の散乱問題を考えた。ここでは、方程式に対応するある汎関数を導入し、それが全ての H^{1}の元に対して非負となるような非線形項を考えた。このとき、他の幾つかの条件の下で、全ての初期値に対して、散乱することが分かった。

研究成果の概要（英文）：
In the academic year of 2011, I studied two kinds of subjects. One is concerned with a singular solution to nonlinear elliptic equations with the harmonic potential. Here, we consider the pure power nonlinearity with the Sobolev supercritical exponent. The existence of the singular solution had already been known. We succeeded to obtain the uniqueness of the singular solution by using its profile. The other one is about the nonlinear Schrodinger equations involving the Sobolev critical exponent. More precisely, we first show the existence of a ground state. Then, by using the ground state, we introduced two kinds of subsets in H^{1} and showed that any solution starting from one of them blows up or grows up and one from the other scatters.

In the academic year of 2012, we studied the scattering problem for the nonlinear Schrodinger equations with general nonlinearities. Here, we introduced a certain functional associated with the equations and assumed the nonlinearities satisfy the value of the functional is nonnegative for all H^{1} functions. Then, under several additional assumptions, we showed that any solution starting from H^{1} scatters.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１１年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１２年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,100,000	660,000	2,730,000

研究分野：非線形偏微分方程式
科研費の分科・細目：数学解析、関数方程式
キーワード：定在波、安定性、爆発、散乱、非線形楕円型方程式、特異解、分岐、モース指数

１．研究開始当初の背景

(1) シュレディンガー方程式の解の挙動については、非線形項がソボレフ劣臨界で``mountain pass structure”と呼ばれる構造を持つと、基底状態より小さいエネルギーを持つ初期値に関しては、爆発するものと散乱するものしかないことが分かっていた。そこで、それらの条件を非線形項が満たさない場合、解の挙動がどうなるのかということが問題となる。

(2) 調和ポテンシャルを持つ非線形楕円型方程式に関して、ソボレフ 劣臨界に対しては、正値解が一意でることが知られているが、ソボレフ超臨界のときは一意性が成り立たず、正値解が幾つも存在する数値計算の結果がある。同様の結果は、球上の非線形楕円型方程式については Dolbeaut-Flores(‘06) や Guo-Wei(‘11)らにより厳密に証明されており、それらの証明では原点で発散する特異解が重要な役割を果たす。そこで、調和ポテンシャルを持つ非線形楕円型方程式に対しても同様のことが成り立つかどうか？そして、それが成立したら、球上の楕円型方程式で用いた方法が適用出来るか?という問題に興味があった。

２．研究の目的

(1) シュレディンガー方程式の解の挙動に関しては、これまでは非線形項がソボレフ劣臨界で``mountain pass structure”と呼ばれる構造を持つ場合を考えていたが、それらが成り立たない場合を考える。一般的に取り扱うのが難しいため、具体的な対象を絞った。まず、ソボレフ劣臨界でない場合として、ソボレフ臨界の場合が挙げられる。そこで、
以下の問題を考えた:

問題 1　ソボレフ臨界の項を含む二重べきの非線形項について解の挙動はどのようになるのか？

上のような二重べきはソボレフ臨界を考えるのに単純な典型例であると言える。そこで、このような例を考えることは、その後の解析に役立つと思われる。

次に, mountain-pass structure が無い場合を考えた。これを一般的に考えるのは、やはり難しいため、その代表例である反発的なべき型非線形項を含む一般的な非線形項を取り扱った。正確に述べると、以下の問題を考えた:

問題 2 方程式に対応する汎関数を導入し、それが全ての H^{1}に対して非負であるような場合､解の振る舞いがどのようになるのか?

上のように一般的に考えた場合、解は反発的なべき型非線形項と同様の振る舞いをするかどうかを解析することが目的である。

(2) 非線形楕円型方程式の特異解については、存在することは既に分かっていたが、一意性については不明であった。そこで、一意性を示すことにより、分岐を調べるための手がかりにしたいというのが目的である。

３．研究の方法

(1) シュレディンガー方程式の解の挙動に関しては、静岡大の赤堀公史氏と月に一回程度研究打ち合わせをした。

「研究目的」で記した問題１のソボレフ臨界を含む非線形項を考える場合は、コンパクト性の欠如という問題が生じる。そこで、変分的な手法の工夫が必要となる。

また、「研究の目的」で記した問題２については、保存量であるアクションと呼ばれる汎関数を H^{1} ノルムを抑えることが出来な

いかどうかを考えた。このことをコムパクトネスの手法と背理法を組み合わせることで示すことが出来ないかと試みた。

(2) 調和ポテンシャルを伴う非線形楕円型方程式の特異解については、J. Wei 氏 (Chinese university of Hong Kong)やF. HadjSelem 氏(Universite Blaise Pascal)とメールのやり取りで、研究を進めた。また、F. HadjSelem 氏のところへ２度訪れ、研究打ち合わせもした。球上の非線形楕円型方程式のときには、あるスケーリングを考えることにより、特異解の存在と一意性を同時に得ることが出来るが、ここで考えている方程式には調和ポテンシャルがあることが原因して、同じ方法が適用出来ない。そこで、特異解の原点における解のプロファイルを用いることで、一意性が証明出来ないかどうかを考えた。

４．研究成果

(1) 「研究目的」で記した非線形シュレディンガー方程式の解の挙動に関する問題 1, 2 ではそれぞれ以下の結果を得た。

問題１については、Brezis-Nirenberg(‘83)のアイデアを用いることて、基底状態が存在することを示した。そして、その基底状態を用いて、``ポテンシャル井戸”と呼ばれる互いに素な H^{1} の部分集合を２つ定義し、一方から出発した解は、(有限時間又は無限時間)で爆発し、他方から出発した解は散乱することを示した。

問題２については，このような非線形項の条件のときには、H^{1} ノルムがアクションという保存量を用いて抑えられることを示した。これにより、すべての初期値に対して、解は大域的となることが分かった。また、Kenig-Merle(‘06)の議論を用いることにより、解は散乱することが証明出来た。

(2) 調和ポテンシャルを伴う非線形楕円型方程式の特異解については、解のプロファイルを用いることで一意性を示すことが出来た。また、この結果を用いて、大域的な分岐と特異解の関係を調べることが出来、さらには、大域的な分岐のモース指数などの位相的な量も計算することが出来た。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

1. Fouad Hadj Selem, Hiroaki Kikuchi and Juncheng Wei, Existence and uniqueness of singular solution to stationary Schrodinger equation with supercritical nonlinearity. Discrete and Continuous Dynamical Systems-series A, 33 (2013), 4613-4626.
2. Takafumi Akahori, Slim Ibrahim, Hiroaki Kikuchi and Hayato Nawa, Existence of a ground state and scattering for a nonlinear Schrodinger equation with critical growth. Selecta Mathematica, 19 (2013), 545-609
3. Takafumi Akahori, Hiroaki Kikuchi and Hayato Nawa, Scattering and blowup problems for a class of nonlinear Schrodinger equations. Differential and Integral Equations, 25 (2012), 1075-1118.
4. Reika Fukuizumi, Fouad Hadj Selem and Hiroaki Kikuchi, Stationary problem related to nonlinear Schrodinger equations on the unit ball. Nonlinearity 25 (2012), 2271-2301.
5. Takafumi Akahori, Slim Ibrahim, Hiroaki Kikuchi and Hayato Nawa, Existence of a ground state and blow-up problem for a nonlinear Schrodinger equation with critical growth. Differential and Integral Equations, 25 (2012), 383-402.
6. Fouad Hadj Selem and Hiroaki Kikuchi, Existence and non-existence of solution for semilinear elliptic equation with harmonic potential and ソボレフ critical/supercritical nonlinearities, Journal of

Mathematical Analysis and Applications. 387 (2012), 746-754.

7. Hiroaki Kikuchi, Orbital stability of semitrivial standing waves for the Klein-Gordon-Schrodinger system, Annales de l'Institut Henri Poincare-AN. 28 (2011), 315-323.

〔学会発表〕(計 5 件)

1. Hiroaki Kikuchi, Blowup and scattering problems for a class of nonlinear Schrodinger equations,

Analytical and Numerical Advances Around Schrodinger Equations, Toulous (France), 2012 年 10 月 26 日.

2. 菊池弘明, ソボレフ超臨界の非線形項をもつ楕円型方程式の特異解の存在と一意性について 第 103 回神楽坂解析セミナー, 東京理科大学, 2012 年 5 月 26 日.

3. Hiroaki Kikuchi, Scattering and blowup problems for a class of nonlinear Schrodinger equations, Universite' Blaise Pascal (France), 2012 年 3 月 13 日

4. Hiroaki Kikuchi, Scattering and blowup problems for a class of nonlinear Schrodinger equations, the 4th MSJ-SI ``NONLINEAR DYNAMICS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS″, 九州大学, 2011 年 9 月 20 日

5. 菊池弘明, 非線形シュレディンガー方程式の定在波の不安定性に関連する最小化問題について, OCAMI 楕円型方程式研究集会～定常非線形シュレディンガー方程式の定在波解の研究～, 大阪市立大学, 2011 年 8 月 11 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
菊池　弘明 (KIKUCHI HIROAKI)
津田塾大学・学芸学部・講師
研究者番号：00612277