

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 19 日現在

機関番号：55503

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2011～2012

課題番号：23840043

研究課題名（和文） 可換ネーター環の AB 性に関する研究

研究課題名（英文） Study of ABness of commutative noetherian rings

研究代表者

荒谷 督司 (ARAYA TOKUJI)

徳山工業高等専門学校一般科目・准教授

研究者番号：70613222

研究成果の概要（和文）：この研究の目的の一つは、可換ネーター環の AB 性と関係するホモロジカル次元を定義し、その性質について調べることであった。申請者は AB 性と「AB 次元」を定義し、それが環の AB 性と深い関係があることを示した。また、AB 次元が有限であるという仮定を加えると「Auslander-Reiten 予想」が肯定的に解決することを証明した。

研究成果の概要（英文）：One of the aim of this study is to define a homological dimension which corresponds to the ABness of commutative noetherian rings, and to research its properties.

We define an "AB-dimension" which is closely related to the ABness of rings. We show that the "Auslander-Reiten conjecture" is true if the AB-dimension is finite.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2011年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2012年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：可換環論、ホモロジー

1. 研究開始当初の背景

1958 年中山がある予想(NC)を与えた。この予想は現在「中山予想」と呼ばれ、多くのホモロジカル予想がこの予想から派生している。Auslander-Reiten は「中山予想」を拡張した「一般中山予想」(GNC)を与えた。さらに Auslander-Reiten は同じ論文の中で、「すべての有限次元代数において(GNC)が成立すること」と「すべての有限次元代数に

おいて別の予想 (ARC') が成立すること」が同値であることを示した。ここで、もし与えられた有限次元代数が可換であるならば (NC)や(GNC)は自明であるが、(ARC')は自明でないことに注意をする必要がある。申請者が研究している「Auslander-Reiten 予想」(ARC)とは、可換性を仮定した(ARC')である。(ARC)はまだ完全には解かれていないが、Auslander-Reiten , Auslander-Reiten-Solberg ,

Huneke-Sega-Vraciu, Jorgensen-Sega, Avramov-Buchweitz, Huneke-Leuschke, Segal などにより部分的に肯定的に解かれている。申請者は環が正規 Gorenstein 環という弱い条件の下で「Auslander-Reiten 予想」が成立することを示した。「Auslander-Reiten 予想」は、加群の自由性に関する予想である。すべての有限生成加群は自由加群から全射があるので、自由加群を知ることができる「Auslander-Reiten 予想」を解くことには大きな意味がある。

AB 環は Huneke-Jorgensen が定義した環で、とても良いホモロジカルな性質を持つ Gorenstein 環である。AB 環上ではいつでも「Auslander-Reiten 予想」が成立していることから、AB 環について研究することも大変意義深いことである。

Avramov-Buchweitz や Avramov-Buchweitz-Sally は、与えられた次数付加群がある条件をみたすとき、ポアンカレ級数やバス級数、ヒルベルト級数の間にある種の関係式が存在することを示した。また、与えられた次数付加群が Koszul であるとき、その極小射影分解が線形になる事から、これらの関係式がより明らかなものになる事がわかる。Segal は、これらの関係をうまく利用し、次数付環にある仮定を与えると「Auslander-Reiten 予想」が成立することを示した。このように、「一般の環では成立するかどうかかわからない予想が、次数付環で考えると成立している」ことは珍しいことではない。本研究においては、Segal と同じ仮定を与えた環が AB 環であるかどうかについて研究する。

2. 研究の目的

以下 R を可換ネーター環とし、 M を任意の有限生成 R -加群とする。

よく知られている環論の性質には、それぞれに対応したホモロジカル次元が存在している。環論の性質間の関係「正則 \Rightarrow 完全交叉 \Rightarrow Gorenstein \Rightarrow Cohen-Macaulay」と関連して対応するホモロジカル次元には「 $\text{proj dim } M \geq \text{CI-dim } M \geq \text{G-dim } M \geq \text{CM-dim } M$ 」という大小関係があり、さらにその値に関して Auslander-Buchsbaum 型の等式を満たしていること、即ちもしホモロジカル次元の値が有限であるならば、それは $\text{depth } R - \text{depth } M$ に等しくなることが知られている。

本研究では、AB 環に対応したホモロジカル次元を定義し、その性質について調べることを目的とする。

3. 研究の方法

与えられた Gorenstein 環が AB 環であるかどうかを調べるためには、極大 Cohen-Macaulay 加群のみを調べればよいことがわかっている。また、環が孤立特異点を持つとき、極大 Cohen-Macaulay 加群のなす圏は有限次元代数上の加群のなす圏と非常によく似た性質を持っていることが知られている。これらのことから、吉野雄二氏や伊山修氏、Avramov 氏と十分な交流を持つ必要がある。一方、AB 環は Huneke と Jorgensen が定義を与えたものであり、Jorgensen 氏や彼と共著論文を書いている Segal 氏も活発に AB 環を研究している。したがって彼らと深い交流を持ち、議論をしていくことはこの研究にとって大きな糧になる。

次数付環と次数付でない環を繋ぐ概念として、イデアルに関する随伴次数付環がある。今現在、元の環の AB 性と随伴次数付環の AB 性の関係は分かっていないが、その関係を明らかにすることで環の AB 性に関する研究は大きく開けていくことになる。この研究はもちろん容易なものではないが、最後まで成し遂げるために、随伴次数付環はもちろんのこと可換環論のあらゆる内容に造詣が深い後藤四郎氏（明治大学教授）や蔵野和彦氏（明治大学教授）をはじめとする明治大学可換環論セミナーに参加されている研究者の方々や日本における可換環論の第一人者である渡辺敬一氏（日本大学教授）の協力を仰ぎたいと考えている。

4. 研究成果

平成 23 年度における研究計画は、AB 環に関連するホモロジカル次元「AB - 次元」を定義し、それがとても良い性質を持っていることを証明することであった。環の AB 性を詳しく整理することで、「AB - 次元」を定義することができた。また、「AB - 次元が有限である。」という仮定を加えれば、「Auslander-Reiten 予想」が正しいことも証明することができた。これは環論におけるホモロジカル予想を解く上で、大きな前進である。この研究結果に関し、12月にベトナムクイニョン大学で行われた 7-th Japan-Vietnam Joint Seminar on commutative algebra および3月にアメリカミズーリ大学でのセミナーなどで講演を行った。

奈良工業高等専門学校の前田圭一郎氏とともに Auslander-Bridger 型の近似定理の拡張に関する研究も行った。Auslander-Bridger の近似定理は Auslander-Buchweitz の近似定理とともに可

換環論におけるとても重要な近似定理である。我々はこの二つの近似定理の共通の拡張となる近似定理を与えることができた。

名古屋大学の伊山修氏，高橋亮氏，千葉大学の相原琢磨氏，大阪市立大学の吉脇理雄氏との共同研究で三角圏上の次元に関する研究を行った。三角圏の次元は Rouquier が導入したものであり，三角圏の大きさを測る不変量である。我々はこの概念を拡張し，それが既存の結果の拡張であること，多方面に応用があることを示した。

平成24年度においては，まず次数付環が持つホモロジカルな性質に関して研究をし，それを基にして次数付環の AB 性について研究を行った。

次数付環に関する研究では，9月に名古屋大学で可換環論サマースクールとして次数付環に関する勉強会を行った。また，1月には徳山工業高等専門学校において次数付環の表現論に関する勉強会（第3回徳山環論セミナー）を開催した。

これらの勉強会を通して次数付環の表現論に関する新たな見地を得ることができたが，残念ながら次数付環の AB 性に関する結果を得ることは出来なかった。環の AB 性に関する研究は引き続き今度とも行っていく予定である。

一方で，この研究の結果として，次数付超曲面において「傾加群」が存在することが名古屋大学の山浦浩太氏，伊山修氏との共同研究でわかった。傾加群は表現論において加群圏（または導来圏）の構造を調べるために重要な役割を果たすものであることから，この結果は今後の研究に大きな影響を与えることになる。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計8件）

- (1) Tokuji Araya, Exceptional Sequences over Path Algebras of Type A_n and Non-Crossing Spanning Trees. *Algebr. Represent. Theory* **16** (2013), no. 1, 239-250. 査読有
- (2) Tokuji Araya, Dimensions of triangulated categories with respect

to subcategories, 第34回可換環論シンポジウム 報告集(2012), 146-149. 査読無

- (3) Tokuji Araya, Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories, Proceedings of the 45th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (2012), 12-15. 査読無
- (4) Tokuji Araya; Kei-ichiro Iima, (S_n) 条件による C -syzygy のある特徴づけ, 第24回可換環論セミナー 報告集(2012), 122-125. 査読無
- (5) Tokuji Araya; Kei-ichiro Iima, Auslander-Bridger 型近似定理について, 第24回可換環論セミナー 報告集(2012), 135-137. 査読無
- (6) Tokuji Araya, Auslander-Reiten conjecture for modules of finite AB-dimension, Proceedings of the 7th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra (2012), 202-204. 査読無
- (7) Tokuji Araya; Kei-ichiro Iima; Ryo Takahashi, On the left perpendicular category of the modules of finite projective dimension. *Comm. Algebra* **40** (2012), no. 8, 2693-2699. 査読有
- (8) Tokuji Araya; Kei-ichiro Iima; Ryo Takahashi, On the structure of Cohen-Macaulay modules over

hypersurfaces. J. Algebra 361 (2012),
213-224. 査読有

[学会発表] (計 22 件)

- (1) 荒谷 督司, Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories 2, 2013 年度日本数学会年会, 2013 年 03 月 21 日, 京都大学
- (2) 荒谷 督司, Auslander-Reiten 予想について, 第 12 回大和郡山セミナー, 2013 年 02 月 03 日, 奈良工業高等専門学校
- (3) 荒谷 督司, Graded Cohen-Macaulay modules over Graded Cohen-Macaulay, 第 3 回徳山環論セミナー, 2013 年 01 月 13 日, 徳山工業高等専門学校
- (4) Tokuji Araya, Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories, 第 34 回可換環論シンポジウム, 2012 年 11 月 25 日, 生産性国際交流センター
- (5) 荒谷 督司, Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories, 2012 年度日本数学会秋期総合分科会, 2012 年 09 月 20 日, 九州大学
- (6) Tokuji Araya, Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories, 第 45 回環論および表現論シンポジウム, 2012 年 09 月 08 日, 信州大学
- (7) Tokuji Araya, Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories, XV International Conference on Representation of Algebras, 2012 年 08 月 14 日, Bielefeld University (ドイツ)
- (8) 荒谷 督司, Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories, Studio Phones Seminar at Kobe university, 2012 年 07 月 16 日, 神戸大学
- (9) Tokuji Araya, AB dimension, Algebra seminar, 2012 年 03 月 15 日, University of Missouri (アメリカ)
- (10) Tokuji Araya, Thick subcategories over

graded simple singularities,
Commutative Algebra Seminar, 2012 年
02 月 13 日, University of
Nebraska-Lincoln (アメリカ)

- (11) 荒谷 督司, Auslander-Bridger 型近似定理について, 第 24 回可換環論セミナー, 2012 年 02 月 02 日, 霧島市市民サービスセンター
- (12) Tokuji Araya, Auslander-Reiten Conjecture for modules of finite Abdimension, The 7th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra, 2011 年 12 月 15 日, Qui Nhon University (ベトナム)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

荒谷 督司 (ARAYA TOKUJI)

徳山工業高等専門学校・一般科目・准教授
研究者番号 : 70613222

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :