

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 18 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(S)

研究期間：2012～2016

課題番号：24224002

研究課題名(和文)無限群と幾何学の新展開

研究課題名(英文)New developments in infinite groups and geometry

研究代表者

坪井 俊(Tsuboi, Takashi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：40114566

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 156,700,000円

研究成果の概要(和文)：興味深い無限群の理解が深まり、無限群をあつかう研究の手法が整えられてきたことを踏まえ、無限群と幾何学の研究を総合的に進めた。関係する分野の研究者の共同研究により、無限群作用のトポロジ的、幾何的、力学系的な性質と様々な不変量の関係を明らかにした。無限群の共役類、交換子にかかわる新たな不変量を創出するとともに、それらをトポロジーおよび幾何学の諸問題へ応用し、クライン群、写像類群、不定値計量空間形の大域解析など、多くの分野で成果を得た。

研究成果の概要(英文)：The symmetry of objects usually appear as infinite noncommutative groups. Compared with finite groups, they have been more difficult to understand. Recently, however, we began understanding better several interesting infinite groups. In this project, collaborating with the researchers of related areas, we clarified the relationship between topological, geometric or dynamical properties of group actions and various invariants of them. We established several new methods as well as several new invariants concerning conjugate classes or commutators of infinite groups, and obtained several new insights in many fields, e.g., in the fields of Kleinian groups, mapping class groups, global analysis on space forms of indefinite metrics etc.

研究分野：幾何学

キーワード：無限群 幾何学

1. 研究開始当初の背景

様々な幾何学における対称性を記述する群は通常、非可換無限群であるが、有限的な対称性を記述する有限群と比較して、非可換無限群の理解は難しいものであった。近年、リー群およびその離散部分群、様々な構造を保つ微分同相群、曲面の写像類群、有限表示群、実樹木の変換群などの理解が進んだ。また、群作用の特性類、無限群上の安定交換子長、解析的、確率論的力学系不変量を用いた無限群の研究の手法が整えられてきた。すなわち、無限群と幾何学の研究を総合的に進める基礎が固められてきた。

2. 研究の目的

幾何学およびトポロジーにおける無限群の幾何学的研究の発展を踏まえ、関係する分野の研究者の共同研究により、無限群作用のトポロジック、幾何的、力学系的な性質と様々な不変量の関係を明らかにする。さらに無限群に対する新しい不変量を創出し、その意味を明らかにするとともに、それらをトポロジーおよび幾何学の諸問題へ応用する。

3. 研究の方法

各研究者が無限群の幾何的研究を推進しつつ、特に重点を置く(1)[空間形と無限群]、(2)[多様体の微分同相群]、(3)[曲面の写像類群]、(4)[無限群の力学系的不変量]、(5)[無限群と野生的空間]の5つの研究について、共同研究グループを組む。さらにグループ間の研究交流により、これらの研究を相互に関係させて新しい研究を生み出す。

4. 研究成果

(1)~(5)にまたがる研究成果として、以下のものが得られた。

研究代表者 坪井は、(3)、(4)、(5)に関する研究として、微分同相群の一様完全性、一様単純性についての研究を継続し、球面の同相群の恒等写像成分、メンガーコンパクト空間の同相群に対して、任意の元は1個の交換子として書けることを示し出版した。これは同相写像の力学系的性質に着目して示したが、独創的な成果である。

研究分担者 小島は、(1)、(3)、(4)に関する研究として、曲面の自己同型写像の複雑さを計るエントロピーと写像トーラスの単体体積の間にある関係を研究し、擬アノソフ型自己同型写像に対し、Greg McShane と共同で、面積により正規化したエントロピーと写像トーラスの体積の比は面積に依らない一定の定数で下から評価されることを示した。これは双曲3次元多様体についての著しい結果である。

研究分担者 大鹿は、(3)、(4)に関する研究として、タイヒミュラー空間の Bers 境界の商空間(reduced Bers boundary)を導入し、そこには写像類群が自然に作用し、この空間の対称の群は、拡張された写像類群に完全に

一致することを証明した。さらに、指標多様体の中のクライン群の変形空間の相対的位置、クライン群の極限集合の中の Patterson-Sullivan 測度の剛性、ヘーガード分解に伴う写像類群の部分群の双曲性などについて研究し、クライン群の変形空間の理論の深化に大きく貢献した。特に Thurston の「double limit theorem の Schottky 空間版の構成」問題を完全解決した。

研究分担者 小林は、(1)、(2)に関する研究として、非対称空間およびその不連続群による商における大域解析の基礎理論構築を行った。まず、実旗多様体という幾何的概念を導入し、正則表現の重複度が有限になるための幾何的な必要十分条件を超局所解析を用いて与えた。また、無限次元表現の分岐則の離散性・重複度の有限性を保証するような対称対の分類理論を完成させた。さらに、不変微分作用素環が非可換な空間において、幾何的な測度評価の手法を導入し、正則表現が緩増加になるための検証可能な判定条件を得た。一方、固有不連続性の量的評価の概念を導入することによって、不定値計量をもつ空間形におけるスペクトル理論の研究を開始した。これらはそれぞれ新しい研究分野を創り出したものである。

研究分担者 藤原は、(3)、(4)、(5)に関する研究として、Bestvina, Bromberg と共同で、擬ツリーへの群作用の理論を確立した論文を出版した。それによって、写像類群、双曲群、自由群の外部自己同型群などについて、統一的な扱いが可能になった。同時に、写像類群の漸近次元の有限性を示した。これにより新しい理論の枠組みが出来てきた。

研究分担者 河澄は、(2)、(3)に関する研究として、境界成分数が複数の曲面の(高次)ジョンソン準同型を定式化し、また、ゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数を用いて任意のコンパクト曲面について柏原ヴェルニュ問題を定式化し、トゥラエフ余括弧積に由来するジョンソン準同型像の制約条件が、榎本佐藤トレースによるものと同値であることを示した。

研究分担者 足助は、(2)、(4)に関する研究として、葉層構造の二次特性類の連続変形による微分や変形についての特性類を統一的に Chern-Weil 理論を用いて計算する枠組みを与えた。特に Godbillon-Vey 類・Bott 類の微分については横断的な射影構造との関係を明らかにした。

研究分担者 大島は、表現論と関連する研究を強化するため 2015 年度から共同研究に加わり、(1)、(2)に関係する研究として、特殊関数の満たす常微分方程式系について新しい構成、相互関係を明らかにした。

連携研究者の松元は、(1)、(2)、(4)に関する研究として、円周の微分同相、3次元多様体上のフローなどについて新たな研究成果を多く出した。浅岡は、(2)、(4)に関する研究として、多重葉層構造の分類、群作用の剛

性について明らかにした。高村は、ポアソンベクトル場のコホモロジーについてのコンピュータによる計算を行い、新しい特性類の存在を示した。

2013年には国際会議「Geometry and Foliations 2013」を東京で開催し、国際的な共同研究を推進した。また毎年「葉層構造と微分同相群研究集会」、「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」研究集会を開催し、国内外の研究情報の交流と若手研究者の育成に努めた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計93件)

(1) Taro Asume, Notes on 'Infinitesimal derivative of the Bott class and the Schwarzian derivatives', *Tohoku Math. J.*, 69, (2017), 129-139, 査読有

(2) In Kang Kim, Cyril Lecuire, Ken'ichi Ohshika, Convergence of freely decomposable Kleinian groups, *Inventiones Math.*, 201, (2016), 83-131, DOI:10.1007/s00222-015-0609-5 査読有

(3) F. Kassel and T. Kobayashi, Poincare series for non-Riemannian locally symmetric spaces, *Advances in Mathematics*, 287, (2016), 123-236, DOI:10.1016/j.aim.2015.08.029 査読有

(4) Mladen Bestvina, Ken Bromberg, Koji Fujiwara, Bounded cohomology with coefficients in uniformly convex Banach spaces, *Comment. Math. Helv.*, 91, (2016), 203-218, DOI:10.4171/CMH/383 査読有

(5) Mladen Bestvina, Ken Bromberg, Koji Fujiwara, Stable commutator length on mapping class groups, *Ann. Inst. Fourier*, 66, (2016), 871-898, DOI:10.5802/aif.3028 査読有

(6) T. Kobayashi, B. Orsted, P. Somberg, and V. Soucek, Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry. I, *Advances in Mathematics*, 285, (2015), 1796-1852, DOI:10.1016/j.aim.2015.08.020 査読有

(7) T. Oshima, Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation, *Opuscula Math.*, 35, (2015), 665-688, 査読有

(8) Y. Benoist and T. Kobayashi, Temperedness of reductive homogeneous spaces, *J. of the European Math. Soc.* 17, (2015), 3015-3036, DOI:10.4171/JEMS/578. 査読有

(9) K. Fujiwara, Subgroups generated by two pseudo-Anosov elements in a mapping class group. II. Uniform bound on exponents, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367, (2015), 4377-4405, DOI:10.1090/S0002-

9947-2014-06292-2 査読有

(10) D. Calegari, K. Fujiwara, Counting subgraphs in hyperbolic graphs with symmetry, *J. Math. Soc. Japan*, 67, (2015), 1213-1226., DOI:10.2969/jmsj/06731213 査読有

(11) N. Kawazumi and Y. Kuno, Intersections of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, to appear in *Ann. Inst. Fourier*. 65, (2015), 2711-2762, DOI: 10.5802/aif.3001 査読有

(12) Taro Asume, Derivatives of secondary classes and 2-normal bundles of foliations, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 22, (2015), 893-937, 査読有

(13) Taro Asume, Transverse projective structures of foliations and infinitesimal derivatives of the Godbillon-Vey class, *Internat. J. Math.*, 26, (2015), 1540001, DOI:10.1142/S0129167X15400017 査読有

(14) W. Jeon, I. Kim, K. Ohshika and C. Lecuire, Primitive stable representations of free Kleinian groups, *Israel J. Math.* 199 (2014), no. 2, 841-866. 査読有

(15) K. Ohshika, Reduced Bers boundaries of Teichmuller spaces, *Ann. Inst. Fourier*, 64 (2014), 145-176. 査読有

(16) T. Kobayashi and T. Matsuki, Classification of finite-multiplicity symmetric pairs, *Transformation Groups*, vol. 19 (2014), pp.457-493. DOI: 10.1007/s00031-014-9265-x. 査読有

(17) Mladen Bestvina, Kenneth Bromberg, Koji Fujiwara, Constructing group actions on quasi-trees and applications to mapping class groups. *Publ. IHES.* 122, (2015), 1-64. DOI:10.1007/s10240-014-0067-4, 査読有

(18) N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, *Quantum Topology*, 5 (2014), 347-423. 査読有

(19) Takashi Tsuboi, Homeomorphism groups of commutator width one, *Proc. AMS*, 141, (2013), 1839-1847. DOI: 10.1090/S0002-9939-2012-11595-3 査読有

(20) T. Kobayashi and Y. Oshima, Classification of symmetric pairs with discretely decomposable restrictions of (g, K) -modules, *Crelles Journal*. DOI: 10.1515/crelle-2013-0045 (on line 2013 July 13) 査読有

(21) T. Kobayashi and T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, *Advances in Math.*, 248 (2013), 921-944. DOI: 10.1016/j.aim.2013.07.015 査読有

(22) Sadayoshi Kojima, Entropy, Weil-Petersson translation distance and Gromov norm for surface automorphisms, *Proc. AMS*, 140 (2012), 3993-4002. DOI: 10.1090/

[学会発表](計 188 件)

- (1)Ken'ichi Ohshika, Deformation spaces of Kleinian groups and what are continuous and discontinuous there, Moduli spaces and applications in geometry, topology analysis and mathematical physics, Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Science, Beijing, China, 2017.02.27.
- (2)T. Kobayashi, Birth of New Branching Problems, 日本数学会秋季総合分科会日本数学会 70 周年記念講演, 関西大学, 2016.09.17.
- (3)森田茂之, モジュライ空間の特性類 ~リーマン面, グラフ, ホモロジー同境~, 日本数学会秋季総合分科会秋季賞受賞総合講演, 関西大学, 2016.09.16.
- (4)Koji Fujiwara, Hyperbolic-like behaviour of groups, Introductory Workshop: Geometric Group Theory, MSRI. Berkeley. USA, 2016.08.22.
- (5)N. Kawazumi, The Kashiwara- Vergne problem and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, I, Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theories, Chern Institute of Mathematics, Nankai University. (中国) 2016.07.28,
- (6)Ken'ichi Ohshika, Reduction of boundaries of Teichmüller spaces, Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theories, Chern Institute of Mathematics, Nankai University Tianjin, China, 2016.07.25.
- (7)T. Kobayashi, Conformally Covariant Symmetry Breaking Operators on Differential Forms and Some Applications, Conference on Geometry, Representation Theory and the Baum-Connes Conjecture, The Fields Institute, Toronto, Ontario, Canada, 2016.07.18 ~ 22.
- (8)Taro Asume, A Chern-Weil construction for derivatives of characteristic classes, Foliations 2016, Bedlewo (Poland), 2016.07.16.
- (9)T. Oshima, First order differential equations, International Conference of Partial Differential Equations, フィリピン, Cebu, 2016.01.14.
- (10)T. Oshima, Hypergeometric functions with several variables, Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Bedlewo, Poland, 2015.09.13.
- (11)藤原耕二, Group actions on quasi-trees and quasi-morphisms, 日本数学会秋季総合分科会秋季賞受賞総合講演, 京都産業大学, 2015.09.14.
- (12)小島定吉, Normalized entropy versus

- volume for pseudo-Anosovs, 第 6 2 回トポロジーシンポジウム, 名古屋工業大学, 2015.08.06.
- (13)Takashi Tsuboi, On the group of real analytic diffeomorphisms, Geometries en action, Lyon, France, 2015.07.03.
- (14)Koji Fujiwara, Handlebody subgroups in mapping class groups, Dubrovnik VIII - Geometric Topology, Geometric Group Theory & Dynamical Systems, Inter-University Centre Dubrovnik, Croatia, 2015.06.24.
- (15)T. Kobayashi, Global Geometry and Analysis on Locally Symmetric Spaces with Indefinite-metric, The 11th International Workshop: Lie Theory and Its Applications in Physics (LT-11), Varna, Bulgaria, 2015.06.15 ~ 21.
- (16)K. Ohshika, Hyperbolic 3-manifolds and the Schottky space viewed as lying in the character variety, Group Action Forum, Tsinghua-Sanya Mathematical Forum, Sanya, China. 2014.12.16.
- (17)Koji Fujiwara, Stable commutator length on mapping class groups. Geometric and Combinatorial Group Theory In honor of Eliyahu Rips workshop, Hebrew U, Israel, 2014.12.
- (18)T. Kobayashi, Symmetry Breaking Operators for Rank One Orthogonal Groups. Analysis, Geometry and Representations on Lie Groups and Homogeneous Spaces, Marrakech, Morocco. 2014.12.08 ~ 12.
- (19)大鹿健一, Klein 群の幾何とその応用, 日本数学会秋季総合分科会総合講演, 広島大学, 2014.09.26.
- (20)T. Kobayashi, Branching problems of representations of real reductive Lie groups. Representations of reductive groups, A conference dedicated to David Vogan on his 60th birthday, MIT, USA. 2014.05.19 ~ 23.
- (21)Takashi Tsuboi, Several problems on groups of diffeomorphisms, Geometry and Foliations 2013, 東京大学数理科学研究科, 2013.09.11.
- (22)Ken'ichi Ohshika, Geometric completion for quasi-Fuchsian spaces, AMC 2013, Pusan BEXCO, Korea, 2013.07.04.
- (23)浅岡正幸, アノソフ力学系と群作用の剛性問題. 日本数学会春季賞受賞講演, 2013.03.21.
- (24)T. Kobayashi, Branching Laws for Infinite Dimensional Representations of Real Lie Groups. (5 lectures), Mathematical Panorama Lectures in celebration of 125th birthday of Srinivasa Ramanujan, Tata Institute, India. 2013.2.18 ~ 22.
- (25)Koji Fujiwara, Group actions on

quasi-trees, Cohomological methods in Geometric group theory, Banff International Research Station, Banff, Canada, 2012.11.29.

(26)大鹿健一, クライン群の変形空間の位相構造, 日本数学会幾何学賞受賞特別講演, 九州大学. 2012.09.19.

(27)Takashi Tsuboi, Homeomorphism groups of commutator width one, Geometry in Dynamics - Satellite Thematic Session, 6th European Congress of Mathematics, Krakow, 2012.07.01.

〔図書〕(計4件)

(1)T. Kobayashi, T. Kubo, and M. Pevzner, Conformal Symmetry Breaking Operators for Differential Forms on Spheres, Lecture Notes in Mathematics 2170, (2016). 184 pages. DOI: 10.1007/978-981-10-2657-7

(2)坪井俊, 東京大学出版会, 幾何学 II ホモロジー入門, 2016, 320 ページ

(3)T. Kobayashi and B. Speh, American Mathematical Society, Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups, 2, 118 ページ.

(4)小島定吉 離散構造, 朝倉書店, (2013), 170 ページ

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/I/GAG/>

受賞

森田茂之 2016年度日本数学会秋季賞「写像類群と自由群の外部自己同型群のコホモロジー理論」

藤原耕二 2015年度日本数学会秋季賞「擬ツリー上の群作用の構成」

小林俊行 平成26年春 紫綬褒章「数学研究功績」

藤原耕二 平成25年度文部科学大臣表彰科学技術賞(理解増進部門)「滞在型プログラム JIR による数学研究の社会への理解増進」

浅岡正幸 2013年度日本数学会春季賞「双曲力学系および関連する幾何学の研究」

大鹿健一 2012年度日本数学会幾何学賞「Bers-Sullivan-Thurston の稠密性予想の解決」

アウトリーチ: 2014年8月に、研究代表者の研究に基づく高校生への成果の発信についての報告「How can mathematicians show the beauty of mathematics to high-school students」を含む The Seoul Intelligencer

が国際数学者会議 ICM Seoul2014 に参加した約5千人に配布された。

6. 研究組織

(1)研究代表者

坪井 俊 (TSUBOI, Takashi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 40114566

(2)研究分担者

小島 定吉 (KOJIMA, Sadayoshi)

東京工業大学・情報理工学院・教授
研究者番号: 90117705

大鹿 健一 (OHSHIKA, Ken'ichi)

大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 70183225

小林 俊行 (KOBAYASHI, Toshiyuki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 80201490

藤原 耕二 (FUJIWARA, Koji)

京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60229078

河澄 響矢 (KAWAZUMI, Nariya)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 30214646

足助 太郎 (ASUKE, Taro)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 30294515

大島 利雄 (Oshima, Toshio)

城西大学・理学部・教授
研究者番号: 50011721

(3)連携研究者

松元 重則 (MATSUMOTO, Shigenori)

日本大学・名誉教授
研究者番号: 80060143

森田 茂之 (MORITA, Shigeyuki)

東京大学・名誉教授
研究者番号: 70011674

金井 雅彦 (KANAI, Masahiko)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 70183035

中山 裕道 (NAKAYAMA, Hiromichi)

青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号: 30227970

森吉 仁志 (MORIYOSHI, Hitoshi)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科
・教授
研究者番号：00239708

林 修平 (HAYASHI, Shuhei)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：20247208

皆川 宏之 (MINAKAWA, Hiroyuki)
山形大学・地域教育文化学部・教授
研究者番号：30241300

野田 健夫 (NODA, Takeo)
東邦大学・理学部・准教授
研究者番号：90431618

浅岡 正幸 (ASAOKA, Masayuki)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10314832

児玉 大樹 (KODAMA, Hiroki)
東京大学・大学院数理科学研究科
・特任准教授
研究者番号：40466826

高村 正志 (TAKAMURA, Masashi)
青山学院大学・社会情報学部・助教
研究者番号：20598859

松田 能文 (MATSUDA, Yoshifumi)
青山学院大学・理工学部・助教
研究者番号：60549294

(4)研究協力者

()