2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月 22 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(A)（一般）
研究期間：2012～2016
課題番号：２４２４４００７
研究課題名（和文）非圧縮流体の運動方程式に対する応用解析

研究課題名（英文）Applied analysis of equations of incompressible fluid motions

研究代表者
岡本　久（Okamoto, Hisashi）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：４０１４３３５９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　21,000,000円

研究成果の概要（和文）：流体の運動方程式であるナヴィエーストークス方程式を研究し、以下の成果を上げた：
[A] 巨大レイノルズ数におけるパターン形成の解明、特に、コルモゴロフ問題において数多くのunimodal solutionを[発券したこと、B] 解が有限時間で爆発するモデル方程式の適切性、特にConstantin-Lax-Majda方程式の一般化を通じて移流項の重要性を認識させたこと、[C] 爆発解の数値計算法、[D]水面波の数値計算。

研究成果の概要（英文）：The Navier-Stokes equations, which are the master equations of the fluid motion, are considered. In the following four problems, I obtained significant results. [a] discovery of unimodal solutions, [b] study on well-posedness of various model equations for fluid motion,[c] numerical method for computing blow-up solutions, [d] numerical computation of water-waves.

研究分野：数学

キーワード：数理流体力学

１．研究開始当初の背景

ナヴィエ－ストークス方程式（以下、NS 方程式と略記）やオイラー方程式は流体力学の基礎となる非線形偏微分方程式である。そこには多くの未解決問題が数学者の挑戦を待っている。それらは多くの場合、既存の方法を当てはめれば何とかなるというものではなく、独特の工夫を必要とすることが多い。そして、そうした工夫がしばしば新しい数学的手法を生み出してきた。非線形偏微分方程式に対する位相幾何学的方法も、もともとは 1930 年代に Jean Leray らが NS 方程式の解の存在を証明するための工夫から発展したものである。また、いくつかの数値計算法（たとえばスペクトル法）は流れを高解像度で見るために開発され、現在まで様々な改良が続けられてきた。現在残された問題は困難を極めているものが多いけれども、同方程式の問題解決のために試行錯誤することは、上のような意味で数学上の意義が大きいと信じている人は多い。

２．研究の目的

本研究では以下の四問題に集中的に挑戦する予定である：[A] 巨大レイノルズ数におけるパターン形成、[B] 解が有限時間で爆発するモデル方程式の研究、[C] 爆発解の数値計算法、[D]水面波の数値計算。さらに、こうした知見を地球流体力学に現れるモデル方程式たちへ応用したい。

３．研究の方法

[巨大レイノルズ数でのパターン形成] 【ＮＳ方程式を 2 次元平坦トーラス（その座標を (x,y)で表す）で考え、外力として(sin ky, 0) をとる。k は整数である。この設定が定める無限次元力学系の性質を調べ、乱流の性質などをできうる限り厳密に研究せよ】これがコルモゴロフによって 1958 年に提案された問題である。このコルモゴロフ問題は様々な角度から研究され、知識の蓄積も多い。しかし、大きなレイノルズ数（粘性の逆数のようなもの）で何が起きているかがわかるようになったのは比較的最近のことである。私は定常解の分岐を数値計算し、それが示す内部遷移層の性質を論じた。弱いけれどもエネルギースペクトルにべき法則が成り立つことも数値解は示しており、定常解だけに制限してもおもしろい現象が多々存在することに気づいた（これまでの基盤（A）の成果の一部である）。山田道夫氏は同様の問題を球面上で考えたが、これは惑星大気の流体力学に関連した問題であり、応用上も意義が大きい。さて、この状況でのパターン形成を調べるとき、k = 1,2,3 としてみると、レイノルズ数が巨大になると、山が一つで谷もひとつという１ページの右下の絵のような解が存在することがわかった（文献[13]）。k = 3 ならば外力は 3 回振動するわけであるが解の方は１回しか振動しないのである。この結果からいくつかの conjecture が引き出される：外力がどんなものであってもレイノルズ数が十分に大きければ、トポロジー的に見て一番単純なパターンが定常解として存在する（あるいは安定に存在する）。これは非常に強い conjecture であるが、より弱い形で、外力が何であっても、レイノルズ数さえ十分に大きければ外力には依存しない単純なパターンに近づく、あるいは、レイノルズ数の増加に応じて対称性が上がる、というのが成り立つかも知れない。一見逆説的であるが故に面白い現象である。これを様々な設定で検証したいと思う。最新の Xeon CPU を搭載したワークステーションを購入し、これで分岐解の数値的追跡を行う。そのためのプログラムはこれまで使ってきたもののマイナーチェンジですむ。k=3 まではわかってきたのであるからより大きな k でどうなるのか、気になるところである。

[解が有限時間で爆発するモデルの研究]
私が研究したいのは、私が 10 年ほど前に思いつき、「一般化ＰＪ方程式」と名づけたもののさらなる一般化である。一般化ＰＪ方程式とは、$u = u(t,x)$ を未知関数とする、次のような非線形偏微分方程式である：$u_{txx} + uu_{xxx} - au_xu_{xx} = u_{xx}$ ここで、a はパラメータである。a=1 のとき、これは Proudman-Johnson 方程式と呼ばれているので、これを一般化ＰＪ方程式と呼ぶことにする。これをもう少し拡張するだけで実に多くの微分方程式がその特殊な場合として含まれることがわかった。２以上の任意の自然数 m に対して、m 次元軸対称なＮＳ方程式の自己相似解の方程式、液晶のモデルとして提唱された Hunter-Saxton 方程式、Burgers 方程式、こうしたものが特殊な場合として含まれる。さらに、速度と渦度の関係をうまく定義し直すと、Constantin-Lax-Majda 方程式や文献[28]のモデル方程式も含み、さらに、浅水波のモデル方程式として知られている Camassa-Holm 方程式も含むようにできることを明らかにすることができた（論文準備中）。したがって、この一般化された方程式の解の爆発や滑らかさを統一的に調べ、その結果を精査することによって、一体全体何が解の爆発の原因なのか、より深い理解が可能になるのではないかと期待している。初年度には、時間局所解の存在定理から始めて、特異点の存在・非存在を調べる予定である。また、[C]の成果を応用して数値実験する予定である。

[爆発解の数値計算法]
半線形熱方程式の解の爆発時刻を数値的に求めるという問題については文献[33]が現在最良のものであると思う。重要ではあるがこの論文でやり残した問題を解決したい。具体的には、(1)最大値原理が成り立たない微分方程式でも爆発時刻まで込めて近似が成

り立つような差分スキームが構成できるかどうか、(2)拡散係数がゼロに収束するときの特異極限でも爆発時刻まで込めて近似できるか、といった重要な問題の解決である。また、特異点の近傍で空間的に細かくする、いわゆる適合格子を使った場合に収束が証明できるか、というのも大事である。適合型格子では確かに数値解はそれらしいものを見せてくれるが、収束証明があるわけではなさそうである。また、適合型であるが故の問題点もある。たとえば、本来一定の速度で進むはずの波動が格子の細かいところと粗いところの境界で波動が反射したり加速したりすることは昔から知られていたようである。本来の現象にない虚構が数値アルゴリズムのせいで現れてくるわけであるが、こういった現象を数学的に解明したい。

[水面波の数値計算]
伝統的に、水面波の問題では渦無しの流れを仮定することが多かった。しかし、渦有りの水面波の重要性は現在では強く認識されているところである。John Toland 氏は最近、これを変分法で特徴付けることに成功している。これを数値計算に使えないかどうか、東海林まゆみ氏と検討を始めている。メモリーを食うやり方であるが、変分法の直接法で解の存在が証明できるならば、それを最小化問題として数値計算することは可能であろう。とても速い方法であるとは思えないが、これまで変分法以外の方法で計算してみて、失敗してきているので、トライすべきものと考えている。以上は、進行波、すなわち、形を変えずに一定の速度で進む波を決定する問題である。これとは別に、定在波(standing wave)、すなわちその場で上下に振動する時間周期的な波を計算してみたいと思っている。定在波は進行波と同じくらい重要な波であるが、自由境界問題としての数学的な取り扱いはきわめて難しく、J. Toland 氏や岡村誠氏（九州大学応用力学研究所）の研究があるけれども、前者は純粋に偏微分方程式の存在定理のみに特化しており、後者は先駆的な研究として高く評価するけれども、数学の立場からはまだまだやらねばならない問題がある。

４．研究成果

Unimodal solution の存在について、文献[1,8,11,13]において、詳細な数値実験結果を発表した。領域を変え、外力を変え、様々に実験をしたが、レイノルズ数さえ大きければ、unimodal solution が出ることが確認された。外力のモードは k=10 であっても unimodal は現れた。また、狭い意味の Kolmogorov 流よりもさらに一般の外力でも出現した（[11]）。さらに面白いことに、現れる流線のパターンが大別して３種類しかないこともわかりつつある。多種多様な外力にもかかわらず、レイノルズ数∞の極限である種の普遍性が存在しそうなのである。これはなかなか魅力的な問題である。[13]で解説したように、unimodal solution は Kraichnan の逆カスケード理論とも相性が良く、２次元乱流の理解に不可欠な要素と言えるかも知れない。

水面波の粒子の軌道を計算したのが[2]である。これによれば、いわゆるストークス漂流は思ったよりも大きく、環境問題などで、これまで信じられてきたよりもずっと大きな役割を果たしているかも知れない。[2]では、ストークス漂流が起きることの証明を関数論に帰着させる証明も発表した。これによって、それまでに知られていた証明を簡略な方法で置き換えることが出来た。

水面波の計算は渦ありの場合にようやく計算方法が確立できた。結果も出つつあり、発表も間近い。渦ありの場合にはよどみ点が現れる点が、数値計算を複雑にさせている。有る場合に２個以上のよどみ点が出ることもわかった。

非線型熱方程式の時間変数を複素数にすると面白い現象が出てくる。特異点を複素平面で考えるとき、その特異点は孤立特異点か分岐点のどちらかであろう。数値実験してみると、孤立特異点は現れず、分岐点のみが現れる。分岐点を解のリーマン面に沿って探してみると、かなり多く見つかる。こうした分岐点の性質を知ることによって爆発解の性質を再検討してみるのは面白い課題であると思う。数値実験は[9]に公表した。

Craik の力学系の探索：Alexander Craik 氏の考案した３次元力学系はナヴィエ−ストークス方程式から導かれたものであるが、少し一般化することで、Pehlivan が考えた電気回路のモデルを含むように出来る。極めて一般的な常微分方程式である。これにはコンパクトなアトラクターが必ずしも存在しない。ほとんどの解の軌道は非有界で、その $t\to\infty$ での挙動から２種類に分けられる。その２種類を分けるものがある種の周期解であるということが数値実験によって示唆されていた。しかし、数学的に証明することはこれまで 15 年ほど誰にも出来なかった。宮路智行氏との共同研究で、周期解の存在を、精度保証計算を使うことによって証明することに成功した（文献[6]）。Craik-Pehlivan の方程式のパラメータを様々に変えると、周期解分岐やカオスが発生するメカニズムが解明された（[7]）。これによって、[6]の周期解以外の周期解も存在することがわかり、解の相空間での分類ができそうな見込みが立ってきた。

ナヴィエ−ストークス方程式に関する様々なモデル方程式を統一的に考え、現状を総括し、未解決問題を論じた（[12,14]）。ナヴィ

エーストークス方程式の解の爆発の問題ははあまりに難しい。その本質を備えたモデルで考察し、性質を類推するという戦略は重要なものである。特に意味のあるテーゼとして、「流れの方程式の移流項が解の爆発を押さえる」があげられる。これは様々なモデルで検証してきたが、数学的な理論化に成功してはいない。Proudman-Johnson 方程式に関する予想は 15 年以上たった今でも未解決である。Constantin-Lax-Majda 方程式の一般化においても同様の予想が立っているけれども、証明には成功していない。ただ、数値実験の結果は明白にこれを指示している（[4]）。同方程式を力学系の立場から研究すれば面白いことがわかろうかと期待しているが、今のところ手つかずである。一方、一般化 CLM 方程式が unimodal solution を持つことは数値的に確かめられており、近々投稿予定である。その解が unimodal であることを精度保証で証明することも試みている。

研究の成果は研究代表者や連携研究者・研究協力者によって内外の学会等で発表している。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１４件）

[1] S.-C. Kim and H. Okamoto, The generalized Proudman-Johnson equation at large Reynolds numbers, IMA J. Appl. Math., 78 (2013), 379--403.　査読有り

[2] H. Okamoto and M. Shoji, Trajectories of fluid particles in a periodic water-wave, Philos. Trans. R. Soc. A vol. 370, (2012), 1661--1676.　査読有り

[3] H. Okamoto, Blow-up problems in the strained vorticity dynamics and critical exponents, J. Math. Soc. Japan., vol. 65, (2013), 1079–1099.　査読有り

[4] H. Okamoto, T. Sakajo, & M. Wunsch, Steady-States and Traveling wave solutions of the generalized Constantin-Lax-Majda equation, Discrete and Continuus Dynamical Systems, vol. 34, (2014), 3155–3170.　査読有り

[5] S.-C. Kim & H. Okamoto, The generalized Proudman--Johnson equation and its singular perturbation problems, Japan J. Indust. Appl. Math., vol. 31, Issue 3, (2014).　査読有り

[6] T. Miyaji & H. Okamoto, A computer-assisted proof of existence of a periodic solution, Proceedings of the Japan Academy, Series A, vol. 90, (2014), 139--144.　査読有り

[7] T. Miyaji, H. Okamoto & A. Craik, A four-leaf chaotic attractor of a three-dimensional dynamical system, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 25 (2015), 1530003 (21pages). 査読有り

[8] S.-C. Kim, & H. Okamoto, Unimodal patterns appearing in the Kolmogorov flows at large Reynolds numbers, Online, Nonlinearity, free access! , vol. 28 (2015), 3219--3242.　査読有り

[9] C.-H. Cho, H. Okamoto, & M. Shōji, A blow-up problem for a nonlinear heat equation in the complex plane of time. Japan J. Indust. Appl. Math., vol. 33, (2016), 145--166.　査読有り

[10] T. Miyaji, H. Okamoto, and A. D. D. Craik, Three-dimensional forced-damped dynamical systems with rich dynamics: bifurcations, chaos and unbounded solutions, Physica D vol. 311-312, (2015), 25–36.　査読有り

[11] S.-C. Kim, T. Miyaji, & H. Okamoto, Unimodal patterns appearing in the two-dimensional Navier-Stokes flows under general forcing at large Reynolds numbers, Euro. J. Mech. B Fluid, vol. 67, (2017), 234--246.　査読有り

[12] H. Okamoto, Models and Special Solutions of the Navier-Stokes Equations, to appear in Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids, to appear in Springer.　査読有り

[13] 岡本　久，巨大渦の安定性—2 次元非圧縮高レイノルズ数の流れの中で、 日本物理学会誌 第 71 巻　第 8 号 526　査読有り

[14] H. Bae, D. Chae, & H. Okamoto, On the well-posedness of carious one-dimensional model equations for fluid motion, Nonlinear Analysis, vol. 160 (2017), 25–43. 査読有り

〔学会発表〕（計１２件）
以下、発表者はすべて岡本久。

[1] 講演題目：Some applications of very accurate numerical methods in fluid mechanics, 講演場所：東北大学　国際シンポジウム「階層的ヘテロ流れのモデリング、

シミュレーションとその材料科学への応用III」 時期：2016年11月15日

[2] 講演題目：Generalized Constantin-Lax-Majda equation with viscosity,
講演場所： East Asia SIAM Conference, Macau, China. June 22, 2016

[3] 講演題目：A nonlinear heat equation in the complex plane and an associated ill-posed problem
講演場所：Taiwan SIAM Annual meeting
時期：May 31, 2015

[4] 講演題目：Unimodal patterns appearing in the 2D Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers,
講演場所：8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Beijing 時期：August 11,2015

[5] 講演題目：A blow-up problem for a nonlinear heat equation in the complex plane of time
講演場所：International Conference on Numerical mathematics, Nanjing 時期：8月16日, 2015

[6] 講演題目：An application of interval arithmetic to certain dynamical systems arising in fluid mechanics
講演場所：9^{th} International Congress on Computational Physics, University of Singapore, January, 2015.

[7] 講演題目：Nonlinear heat equations, blow-ups, and their finite difference approximations
講演場所：First Vietnam International Applied Mathematics Conference December 2014

[8] 講演題目：Trajectories of fluid particles in a water-wave, 講演場所：Isaac Newton Institute, Cambridge University, July, 2014

[9] 講演題目：Unimodal Patterns appearing in the 2D Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers, 講演場所： East Asia SIAM Conference, Pattaya, Thailand. June, 2014

[10] 講演題目：Kolmogorov's Dynamical Systems viewpoint on 2D Navier-Stokes flows.
講演場所：非線性偏微分方程与動力系統国際学術討論会、河南理工大学　中国 Oct. 17–19 2013

[11] 講演題目：One-dimensional model equations for incompressible fluid motion,
講演場所： UK-Japan Winter School: Nonlinear Analysis 7--11 January 2013

[12] 講演題目：A Pattern Formation in 2D Navier-Stokes Equations at very high Reynolds numbers, 講演場所：The 8th East Asia SIAM Conference,June 25-27, 2012

〔図書〕（計　２　件）

１　岡本久　他、近代科学社、関数とは何か、長岡亮介氏との共著、近代科学社　2014 年、３２５
２　岡本久、近代科学社、日常現象から解析学へ、２０１６年、２４５.

〔産業財産権〕
無し

○出願状況（計　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~okamoto/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
岡本　久（OKAMOTO, Hisashi）
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：４０１４３３５９

(2)研究分担者
山田　道夫（YAMADA, Michio）
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：９０１６６７３６

(3)連携研究者
東海林まゆみ（SHOJI, Mayumi）

日本女子大学・理学部・教授
研究者番号：１００９０５２３

(4)研究協力者
坂上　貴之（SAKAJO, Takashi）
長山　雅晴(NAGAYAM, Masaharu)
宮路　智行（MIYAJI, Tomoyuki）
KIM Sun-Chul
Alexander D. D. Craik