

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 27 日現在

機関番号：12703

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24310112

研究課題名(和文)凸最適化によるモデリングと計算推論の新展開

研究課題名(英文)Convex Optimization Modeling and Computational Inference

研究代表者

土谷 隆 (TSUCHIYA, Takashi)

政策研究大学院大学・政策研究科・教授

研究者番号：00188575

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,900,000円

研究成果の概要(和文)：凸最適化におけるモデリング・数理・アルゴリズムについて研究した。近年盛んに研究されている凸最適化である半正定値計画や2次錐計画の悪条件性を克服するために、双対ギャップが0でない問題や最適値が存在するが最適解が存在しない問題、弱実行不能問題の構造を解析した。また、von Neumann エントロピー関数に関する自己整合障壁関数を開発した。さらに応用として、古代メソポタミア村落のNuziの粘土板データを解析した。登場する各人物の生誕年、死亡年、文書生成年を推定する問題を凸2次計画問題として定式化し、富が次第に少数の家系に集中していく様子を捉えた。海洋データ同化のための最適化手法の研究も行った。

研究成果の概要(英文)：We studied modeling, mathematics and algorithms of convex optimization. Semidefinite programs and second-order cone programs are convex optimization problems studied intensively recently because of their broad applicability but yet hard to solve. To overcome this difficulty, we analyzed structures of problems with nonzero duality gap and/or unattained optimality, and of weakly infeasible problems. We also developed a self-concordant barrier function for optimization problem involving von Neumann entropy function. Regarding modeling, we studied clay tablet data from Nuzi, an ancient village in Mesopotamia existed 3500 years ago. We formulated estimation problem of birth and death years of individuals appearing in the tablets and generated years of tablets as a convex quadratic program. The result suggested that wealth is generally concentrated to a few rich family over about a hundred year of period. Finally, we also studied optimization methods for ocean data assimilation.

研究分野：統計数理，数理工学

キーワード：凸最適化 半正定値計画 2次錐計画 双対性 制御理論 データ同化 メソポタミア

1. 研究開始当初の背景

1980年代から2000年代にかけて、内点法等のアルゴリズムが進展し、半正定値計画問題に代表されるように、解ける凸最適化問題のクラスが拡大した。それに触発されて、サポートベクターマシンや圧縮センシングなどの新しい情報処理技術が生まれつつある。しかしながら、これらの凸最適化問題に根ざす新技術を実用化する過程で、極端な悪条件問題や超大規模な問題、疎性を有さない問題の解法等が新たな挑戦的研究課題として浮上してきている。また、凸最適化問題によるモデリングの方法論の新展開も求められるようになってきた。

2. 研究の目的

本研究では、凸最適化による現実問題のモデリングとそれに動機付けられた数理・モデリングの問題を横断的に研究し、21世紀の計算推論の基盤技術としての凸最適化を発展的に展開する。下記の部分課題を通じて、総合的に研究を進め、従来不可能であった計算推論を実現することを目的とし、下記の課題を中心に取り組み成果を得た。

- (1) 悪条件半正定値計画問題の正則化と内点法
- (2) -logdet 関数最小化のためのアルゴリズム
- (3) 古代メソポタミア粘土板データからの人口と社会構造の推定
- (4) 年金ポートフォリオ最適運用
- (5) 海洋データ同化
- (6) その他

3. 研究の方法

研究代表者を中心として、各部分課題ごとに分担し、適宜討論、情報交換を行って研究を進めた。以下、部分課題ごとに述べる。(1) 悪条件半正定値計画問題の正則化と内点法については、数値実験なども交えつつ、弱実行不能性問題の解析から、内点法オラクルの理論、多面体性を考慮した面的縮小法の理論へと理論の構築を進めていった。(2) -logdet 関数最小化のためのアルゴリズムについては、まず、von Neumann エントロピー最適化問題に対する自己整合関数の構築に関して、過去の成果等を参照しながら理論的考察を進めていった。一方、スペクトル勾配法について、理論的解析を行いつつ数値実験を行い、その性能を評価した。(3) 古代メソポタミア粘土板データからの人口と社会構造の推定においては、計算機シミュレーションを何度も行い、安定して得られる結果を抽出し、理論的考察を行った。(4) 年金ポートフォリオ最適運用においては、凸最適化の理論のみではなく、正規分布に関する統計量の分布理論を適用して研究を進めた。(5) 海洋データ同化については、海面温度データに関する数値実験を行って問題点を捉えつつ、困難な部分を解決するための理論的考察を行った。さら

に、本研究課題開始時点で遂行していた研究課題の中で、本研究に関係のあるものについて、関連性に留意しつつ研究を進めた。

4. 研究成果

以下、部分課題(1)悪条件半正定値計画問題の正則化と内点法；(2)-logdet 関数最小化問題のためのアルゴリズム；(3)古代メソポタミア粘土板データからの人口と社会構造の推定；(4)年金ポートフォリオ最適運用に関する研究；(5)海洋データ同化；(6)その他に分けて得られた研究成果を報告する。

(1) 悪条件半正定値計画問題の正則化と内点法

半正定値計画問題は、半正定値錐とアフィン空間の交わり上で線形関数を最小化する問題である。線形計画問題とは異なり、半正定値計画問題においては、強双対定理が必ずしも成立せず、双対ギャップが存在する、という問題がある。近年では、内点法をはじめとする有力解法が存在するが、これらの解法は「主問題・双対問題に内点実行可能解が存在する」という正則性条件を必要とし(以下これを正則な問題と呼ぶ)、非正則問題に適用した時の解法の振る舞いはよく分かっていなかった。実際には非正則問題が現れることが知られており、非正則問題に対して得られた近似最適解のアセスメントをきちんとできるようにすることは重要な問題である。本研究の成果はこの問題の解決に寄与できるものと考ええる。

悪条件半正定値計画問題の構造について(雑誌論文[1,3])

悪条件半正定値実行可能性問題について解析を行った。半正定値実行可能性問題については、(i)強実行可能、(ii)弱実行可能、(iii)弱実行不能、(iv)強実行不能の4つの状態がある。弱実行不能問題は、半正定値行列錐とアフィン空間が交わりは持たないが両者の間の距離は0であるような悪条件問題である。本研究では、弱実行不能な問題に対し、行列のサイズを $n \times n$ とすると、元のアフィン空間の高々 $n-1$ 次元部分アフィン部分空間で、半正定値錐との距離が0となるものが存在することを、構成的に示した。このアフィン部分空間の基底としては、実行可能性問題の双対問題に対し、面縮小法を行った時に得られるベクトル(列)を用いることができる。このベクトルは、主問題の空間のベクトルであるが、双対問題の空間で実行可能領域を縮小するのに必要な超平面を定義するのに用いられていた。我々の貢献の一つは、このベクトル列が、それ自身、主問題にとって意味があることを明らかにした点にある。

面的縮小法は、元問題の(強あるいは弱)実行可能か(強あるいは弱)実行不能かについて判定することができるのに対し、実行可能性問題の双対問題に対する面縮小法は、元問題が強状態(強実行可能か強実行不能か)に

あるか、弱状態（弱実行可能か弱実行不能）にあるか、を判定することができる。したがって、元の問題に対して面的縮小法を行い、双対問題に対する面的縮小法を行うことにより、実行可能性に関する4つの状態を完全に判定できることが明らかとなった。

基本的なアイデアは、元の実行可能性問題を、実行可能性の状態をほぼ保ったより小さな次元の実行可能性問題に変換することを繰り返すことである。

さらに、2次錐計画問題についても同様な結果が成立することを示した。

内点法オラクルにより半正定値計画問題を完全に解くことについて（原稿[T1]）

先に述べたように、内点法は「主問題・双対問題に内点実行可能解が存在する」という正則性条件を必要とする。この条件を満たす問題を正則な半正定値計画問題と呼ぶことにする。然るに正則性条件を満たさない問題が世の中には存在する。そこで、正則性条件を満たさない問題を内点法で解くことができるかどうか、という問題について考察する。そのために、内点法を理想化した内点法オラクルを考える。これは、「正則な半正定値計画問題が与えられたら、最適解と最適値を返す」という性質を持つオラクルである。このオラクルを用い、(a)で導出した弱実行不能問題の性質を応用することによって、下記の意味で、任意の半正定値計画問題が、内点法オラクルを $O(n)$ 回呼ぶことによって、下記の意味で完全に解けることを示した。ここで n は行列の大きさである。

「与えられた半正定値計画問題が実行可能か否かを判定する。もし、実行可能であれば、最適値があるか目的関数が非有界かを判定する。もし、最適値があるならば、最適解があるか否かを判定し、最適解が存在するならば、最適解集合の相対的内点を求め、存在しないならば、任意の精度の近似最適解を求める。もし、実行不能であれば、強実行不能か弱実行不能かを定め、弱実行不能な場合は、最小固有値が任意の精度で0に近い負の値であるような近似実行可能解を求める。」

我々は、任意の精度の近似最適解を、改めて半正定値計画問題を解くことなく、それを用いて有限回の四則演算で計算できるような $n-1$ 個の近似最適解の生成子(生成行列)が求められることや、任意の精度の実行不能な近似実行可能解を、それをもちいて改めて半正定値計画問題を解くことなく、有限回の四則演算で計算できるような $n-1$ 本の近似実行可能解の生成子(生成行列)の存在を求められることを示した。現在はこの結果を一般の錐上の線形計画問題に拡張することを試みている。

これらの成果は制御理論に関連して現れる悪条件半正定値計画問題の解析に適用できると考えられる。これに関連して、凸最適化的側面を意識して執筆した制御理論のモ

ノグラフを出版した(著書[1])。

凸最適化の情報幾何や線形計画問題に対するアルゴリズムについて

悪条件の半正定値計画問題の解析に密接に関連する研究課題として、凸最適化の情報幾何や線形計画問題がある。これらの課題について下記の通り、従来から進めていた研究のさらなる展開を図った。

(a) 線形計画問題に対する内点法の計算複雑度の解析(雑誌論文[9])

Mizuno-Todd-Yeの内点法に簡単な変更を加えることにより、その計算複雑度が目的関数に依らないようにできることを示した。

(b) 凸最適化の情報幾何(雑誌論文[6,10,13])

悪条件の凸最適化問題の構造を探る有力な手法の一つとして、内点法の必要とする反復回数を中心曲線の埋め込み曲率の積分によって評価する手法を展開した。

(c) 準ニュートン法の情報幾何的解析(雑誌論文[11,12])

非線形最適化のための準ニュートン法を情報幾何的な観点から解析し、解法のロバストネスを統計学のロバスト推定の手法を用いて解析した。

(d) 線形計画問題の新しい解析やアルゴリズム(雑誌論文[4,8])

多面体の半径の解析や、新線形計画問題に対する新しいアルゴリズムの研究を行った。

(2)-logdet 関数最小化のためのアルゴリズム

von Neumann エントロピー最適化問題に対する自己整合関数の構築(原稿[T2])

X を正定対称あるいは正定エルミート行列とし、 $\text{Tr}(X \log X)$ と X の線形関数の和を半正定値制約および線形制約の下で最適化する問題を考える。この問題は量子情報科学等に多くの応用を持つ。我々はこの最適化問題に関連する関数 $\text{Tr}(X \log X) - \log \det X$ が自己整合的関数であることを証明し、さらに、 $-\log(t - \text{Tr}(X \log X)) - \log \det X$ が自己整合的障壁関数であることを示した。この障壁関数をニュートン法系統の方法で最適化することにより、効率良く量子情報科学等の応用分野の最適化問題を解くことができる。我々はこれをより一般的な枠組みであるEuclidean Jordan Algebraについて解析した。ニュートン法を行うために、この自己整合的障壁関数の勾配やヘッセ行列の計算を効率よく行う方法については今後の興味深い研究課題である。

$-\log \det X$ と X をベクトルとみなした時の 1 ノルムの重み付きの和で定義される目的関数最小化の手法としてスペクトル勾配法を開発し、数値実験を行った(学会発表[15])。

(3)メソポタミア古代村落の社会動態推定

(雑誌論文[5,13])

凸最適化の活用例として、考古学データのデータ解析を行った。紀元前 15 世紀に 100 年余り存在した古代メソポタミア村落ヌジの遺跡(現イラクキルクーク東方)からは、4000 枚以上の社会契約について記した粘土板が出土している。この粘土板の大部分には偽装養子契約をはじめとする契約がかかっている。各粘土板に登場する人物のリストが索引としてまとめられており、これをヌジ人名資料と呼ぶ。本研究では、内点法を用いて 2 万変数以上の凸 2 次計画問題を解き、ヌジ人名資料に登場する人物の生誕年、死亡年、文書作成年を、ヌジ人名資料と矛盾のない形で推定することを試みた。そして、文書の作成年代の分布が、ロジスティック分布に合致することを見出した。これは、古代社会において、少数の家系への富の集中が起こったことを示唆している、と考えられる。

(4)年金ポートフォリオ最適運用(原稿[T3])

正規分布を仮定した平均・分散モデルにおいて平均や分散をデータから推定した時の VaR の値の汎化誤差を導出した。この解析においては、VaR を最大化するポートフォリオを構築する問題が、2 次錐計画問題となることを活用し、正規分布に関連する統計量を解析し、AIC の導出に範をとって導出した。この成果は統計数理研究所共同研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」(統計数理研究所、立川、2013 年 3 月 11 日)において発表し、現在、論文を[T3]としてまとめ、現在投稿準備中である。

(5)海洋データ同化(雑誌論文[2,7,13,14])

海洋データ同化においては、大規模共分散行列推定のために、内点法によるグラフィカルモデルの最尤推定の研究を進める一方、違う視点からの、EM アルゴリズム等を活用した推定法について研究を行った。

(6)その他

本研究の特色は、モデリング・数理・アルゴリズムを一体化して研究を進める点にある。そのような視点から、モデリングについて論じた本を編集し(著書[2])、最小二乗法とモデリングについて論じた原稿を著した(雑誌論文[13])。また、モデリング的側面を強調した最適化の教科書を著した(著書[3])。

テクニカルレポート・原稿等

[T1] Lourenco F. Bruno, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya: Solving SDP completely with an interior-point oracle. (Manuscript, July, 2015).

[T2] Leonid Faybusovich, Takashi Tsuchiya: Matrix monotonicity and self-concordance: how to handle

quantumentropy in optimization problems. Manuscript, Optimization-online, August 2014.

[T3] Tomonari Kitahara and Takashi Tsuchiya: A Note on Generalization Error of the Markowitz Model. 統計数理研究所共同研究レポート 最適化：モデリングとアルゴリズム 24 (2013), pp. 93-103.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 15 件)

[1] Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya: A geometric analysis of weakly infeasible SDP. To appear in Journal of Operations Research Society of Japan, 査読有。

[2] Genta Ueno, and Nagatomo Nakamura: Bayesian estimation of observation error covariance matrix in ensemble-based filters, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, DOI: 10.1002/qj.2803, in press, 査読有。

[3] Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya: Weak infeasibility in second-order cone programming, Optimization Letter, published online (2015), 査読有。

[4] Noriyoshi Sukegawa and Tomonari Kitahara: A refinement of Todd's bound for the diameter of a polyhedron, Operations Research Letters, Vol. 43(2015), pp. 534-536, 査読有。

[5] Sumie Ueda, Kumi Makino, Yoshiaki Itoh and Takashi Tsuchiya: Logistic growth for the Nuzi cuneiform tablets: Analyzing family networks in ancient Mesopotamia. Physica A, Vol.421(2015), pp. 223-232, 査読有。

[6] Satoshi Kakiyama, Atsumi Ohara and Takashi Tsuchiya: Curvature integrals and iteration complexities in SDP and symmetric cone programs. Computational Optimization and Applications, Vol. 57(2014), pp. 623-665, 査読有。

[7] Genta Ueno, and Nagatomo Nakamura: Iterative algorithm for maximum likelihood estimation of observation error covariance matrix for ensemble-based filters, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 140,

Issue 678(2014), Part A, pp. 295-315, DOI: 10.1002/qj.2134, 査読有.

[8] Tomonari Kitahara, Shinji Mizuno and Jianming Shi: The LP-Newton method for standard form linear programming problems, Operations Research Letters, 41(2013), pp. 426-429, 査読有.

[9] Tomonari Kitahara and Takashi Tsuchiya: A simple variant of the Mizuno-Todd-Ye predictor-corrector algorithm and its objective-function-free complexity. SIAM Journal on Optimization, Vol. 23(2013), pp. 1890-1903, 査読有.

[10] Satoshi Kakahara, Atsumi Ohara and Takashi Tsuchiya: Information geometry and interior-point algorithms in semidefinite programs and symmetric cone programs, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.157 (2013), pp. 749-780, 査読有.

[11] Takafumi Kanamori and Atsumi Ohara: A Bregman Extension of quasi-Newton updates I: An Information Geometrical framework. Optimization Methods and Software, Vol. 28, No. 1(2013), pp. 96-123, 査読有.

[12] Takafumi Kanamori, Atsumi Ohara: A Bregman extension of quasi-Newton updates II: Analysis of robustness properties. Journal of Computational and Applied Mathematics. Journal of Computational Applied Mathematics, Vol.253 (2013), pp.104-122, 査読有.

[13] 土谷 隆: 最小二乗法を巡って. オペレーションズ・リサーチ, 59 巻, 2014, pp.34-41, 査読なし.

[14] 土谷 隆: 内点法・情報幾何・最適化モデリング. 統計数理, 61 巻, 2013, pp.3-16, 査読有.

[15] 上野玄太: データ同化における大規模グラフィカルモデルの推定について, 統計数理, 第 6 1 巻第 1 号, 2013, pp.17-46, 査読有.

[学会発表](計 16 件)

[1] Genta Ueno: Bayesian estimation of observation error covariance matrix in the equatorial Pacific, Ocean Sciences Meeting, New Orleans, USA, February 26,

2016.

[2] Genta Ueno: Estimation of Large-scale Graphical Models for Data Assimilation. ISM High Performance Computing Conference, The Institute of Statistical Mathematics, Tachikawa, Tokyo, October 10, 2015.

[3] Bruno Lourenco, 村松正和, 土谷隆: Weak Infeasibility in Second-order Cone Programming. 最適化: モデリングとアルゴリズム, 統計数理研究所, 立川, 2015 年 3 月 20 日.

[4] Takashi Tsuchiya: von Neumann Entropy, Matrix Monotonicity and Polynomial-Time Interior-point Algorithms (招待講演). Information Geometry for Machine Learning, 理化学研究所, 和光, 2014 年 12 月 5 日.

[5] Bruno Lourenco, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya: A Geometrical Analysis of Weak Infeasibility in Semidefinite Programming and Related Issues. SIAM Conference on Optimization, San Diego, USA, May 22, 2014.

[6] Tomonari Kitahara, Shinji Mizuno: The simplex method and 0-1 polytope, SIAM Conference on Optimization, San Diego, USA, May, 2014.

[7] Takashi Tsuchiya: Geometric approaches to interior-point methods. ((招待)基調講演), X Brazilian Workshop on Continuous Optimization, Florianopolis, Brazil, March 18, 2014.

[8] Genta Ueno: Ensemble Kalman filtering with localization by a graphical model, American Meteorological Society Annual Meeting, Atlanta, USA, February 6, 2014.

[9] Takashi Tsuchiya: Information geometry of symmetric cone programs. The 4th International Conference on Continuous Optimization, Lisbon, Portugal, July 31, 2013.

[10] Takashi Tsuchiya: Information geometry of conic programming and interior-point method. ((招待)基調講演) Hot Topics Workshop on Jordan Theory, Analysis and Optimization, Daejeon, Korea, May 13, 2013.

[11] 北原知就, 鮭川矩義: 上下限制約付き線形計画問題に対する二分探索アルゴリズム, 研究集会「最適化: モデリングとアルゴ

リズム」,政策研究大学院大学,港区,東京,
2016.

[12] 水野眞治,北原知就:単体法で生成される解の数と強多項式アルゴリズム, RIMS 共同研究「組合せ最適化セミナー」(第 12 回),京都大学数理解析研究所,京都市,2015.

[13] 土谷隆:悪条件 SDP/SOCP の構造について(招待講演).新時代の最適化モデルに基づく意思決定支援プラットフォームの研究と開発(科学研究費基盤研究(A)による研究集会,東京工業大学,目黒区,東京,2014 年 9 月 19 日.

[14] 土谷隆:線形計画問題と半正定値計画問題の幾何学的構造について.文部科学省数学協働プログラムワークショップ「正定対称行列をめぐるモデリング・数理・アルゴリズムの世界」,政策研究大学院大学,港区,東京,2014 年 1 月 14 日.

[15] 福田光浩,中垣敬,山下真:対数行列式と L_1 ノルム項をもつ半正定値計画問題に対する非単調スペクトル射影勾配法,文部科学省数学協働プログラムワークショップ「正定対称行列をめぐるモデリング・数理・アルゴリズムの世界」,政策研究大学院大学,港区,東京,2014 年 1 月 14 日.

[16] 土谷隆,北原知就:平均・分散モデルについて.統計数理研究所共同研究集会「最適化:モデリングとアルゴリズム」,統計数理研究所,立川,2013 年 3 月 11 日.

〔図書〕(計 3 件)

[1] 小原敦美:行列不等式アプローチによる制御系設計,(システム制御工学シリーズ),コロナ社,2016,248 頁.

[2] 赤池弘次 他:モデリング:広い視野を求めて.シリーズ:最適化モデリング(室田一雄,池上敦子,土谷隆編)近代科学社,2015,192 頁.

[3] 寒野善博,土谷隆:最適化と変分法,丸善,2014,304 頁.

6. 研究組織

(1)研究代表者

土谷 隆 (TSUCHIYA, Takashi)
政策研究大学院大学・政策研究科・教授
研究者番号:00188575

(2)研究分担者

小原 敦美 (OHARA, Atsumi)
福井大学・工学(系)研究科・教授
研究者番号:90221168

村松 正和 (MURAMATSU, Masakazu)
電気通信大学・情報理工学(系)研究科・教授
研究者番号:70266071

福田 光浩 (FUKUDA, Mitsuhiro)
東京工業大学・情報理工学(系)研究科・准教授
研究者番号:80334548

上野 玄太 (UENO, Genta)
統計数理研究所・大学共同利用機関等の部局等・准教授
研究者番号:40370093

北原 知就 (KITAHARA, Tomonari)
東京工業大学・社会理工学研究科・助教
研究者番号:10551260