

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24330245

研究課題名(和文)中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導カリキュラムの開発研究

研究課題名(英文)A Developmental Study on Curriculum of Argumentation Teaching Based on Mathematical Activity throughout Secondary Education

研究代表者

岩崎 秀樹(Iwasaki, Hideki)

広島大学・教育学研究科(研究院)・教授

研究者番号：50116539

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、中等教育を一貫する数学的活動に基づく理論的基盤を整備し、カリキュラム開発のための枠組みを構築した。本研究における理論的枠組みは、Freudenthalの局所的組織化のアイデアとMariottiらの数学的定理のアイデアを統合したものであり、この枠組みに基づいて論証カリキュラムの分析やモデル教材の開発が推進された。本研究の成果を発信するため、2014年6月に東京学芸大学で開催された日本数学教育学会第2回春期研究大会において創成型課題研究を組織し、その中でカリキュラム開発の理念、モデル教材、単元を通じた数学的活動、カリキュラム評価の観点からそれぞれ研究発表を行った。

研究成果の概要(英文)：In this research project aims at creating theoretical foundations of teaching mathematical proof and argumentation for the sake of curriculum development based on the mathematical activities throughout secondary schools. The research outcome is that we constructed a theoretical framework for curriculum development in the teaching mathematical proof by means of the idea of "local organization" introduced by Freudenthal and the idea of "mathematical theorem" proposed by Mariotti et al. In terms of this framework, we considered the mathematics curriculum and developed a teaching unit at the secondary school level. We also organized a thematic study group at the spring conference of Japan Society of Mathematical Education in June 2014, and made research presentations with regard to the objective of the curriculum development, a teaching unit as a model, mathematical activities through the unit, and curriculum assessment and literacy.

研究分野：数学教育

キーワード：論証指導 数学的活動 カリキュラム開発 中等数学教育 局所的組織化 教師教育 数学的リテラシ

1. 研究開始当初の背景

論証は、数学の方法としてギリシャ以来の数学の歴史に一貫している、というのは数学史家・中村幸四郎の指摘である。教科としての数学にもそうした論証の本質は内包されており、これまで主に中学校図形領域において論証が指導されてきた。中学校図形領域の目標の変遷をみれば、戦後の一時期を除き、「論証の意義や方法の理解」が主要な目標として位置付けられていることがわかる。現行の学習指導要領では、「論証の意義や方法」ではなく「数学的な推論の必要性和意味およびその方法」を理解させることが唱われている。「論証」から「数学的な推論」への変更は、数学教育現代化の反省に立つ昭和52年改訂の学習指導要領で行われたが、こうした「意図したカリキュラム」の変更は、必ずしも「実施したカリキュラム」や「達成されたカリキュラム」の改善には結びついていないようである。論証指導の成果は、全国学力・学習状況調査等を通して繰り返し問題視されているが、今日においても中学校図形領域での論証指導の内容や方法に大きな変更はみられない。こうした状況を鑑みて、高等学校への進学率がほぼ100%に届く今日、中等数学教育を一貫する展望の下、論証指導カリキュラムを抜本的に見直す必要があると考える。

わが国の数学教育研究では、これまで論証指導は主に中学校図形領域をターゲットとして研究と実践が進められてきている。そのため中等教育を一貫する視座の下、そして領域を横断する視座の下で、学校種間の論証指導の質的相違を論じた研究はみられない。また、知識基盤社会の教育課程に求められるリテラシー論の視座から、数学的活動に基づく論証指導カリキュラムの開発と評価の必要性が高まっているといえる。教科に基づく学力と社会の要請する能力の統合を図る理論的基盤を整備しなければ、「論証を理解する中学生徒は20%に満たない」という教育的非常識を乗り越えることはできない、というのが本研究開始当初の課題意識である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、「中等教育の一貫」と「数学的活動」の視座から論証指導の目標・内容・方法を総合的に再検討し、新たな論証教材と論証カリキュラムを開発することである。「中等教育の一貫」という視座の重要性は、前節で述べた通り、後期中等教育が実質的に基礎教育化している今日、学校数学全般にわたる成果を改めて問い直し、これからの数学教育の展開を、論証指導を中核として構想する必要性が高まっているといえる。

また「数学的活動」は、現行の学習指導要領では算数・数学科の目標の冒頭に一貫して掲げられており、その重要性は言うまでもないであろう。これまでの数学教育研究におい

て、Freudenthal は数学化の視座から数学的活動の重要性を主張しているし、Bishop は文化人類学的視座から、どの文化・社会にも通底する普遍的な6つの数学的活動を明らかにしている。

- i. 数える(counting)
- ii. 位置づける(locating)
- iii. 測る(measuring)
- iv. 形を与える(playing)
- v. 遊ぶ(playing)
- vi. 説明する(explaining)

ただし、Bishop は、こうした緒活動を同列に置くことなく、「6番目の説明する活動こそ、単なる経験以上の認識をもたらす」として差異化を図っている。数学教育の今日的意義は、「いくつ」「どこ」「いくら」「なに」「どのように」のような、古典的な経験世界に対する言語・記号的対応や演算処理にあるというよりは、むしろそうした言語・記号的対応や演算処理についての「なぜ」への説明能力に移行しているのではないだろうか。ここに本研究が「数学的活動に基づく論証指導」に焦点化する今日的意義があると考えている。

3. 研究の方法

本研究では、上述した目的の達成のため、中等教育を一貫する数学的活動に基づく理論的基盤を整備し、カリキュラム開発に向けた枠組みを構築する。その枠組みに基づいて、論証指導の目標論・評価論、内容論・方法論を展開し、カリキュラム分析やモデル教材の開発を行う。

4. 研究成果

理論的基盤の整備

本研究では、Freudenthal の局所的組織化(local organization)のアイデア(数学的活動を捉える視点)と、Mariotti らの数学的定理(mathematical theorem)のアイデア(論証を捉える視点)を統合し、中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導の理論的枠組みを開発した。

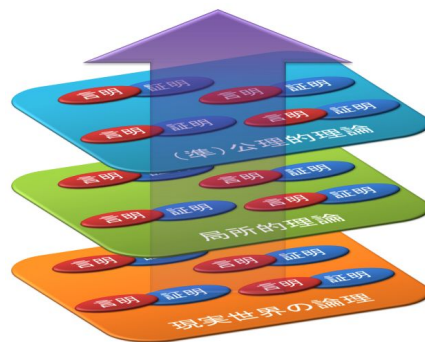


図1: 理論的枠組みのイメージ図

この理論的枠組み(図1)は、論証指導を「言明」「証明」「理論」という3つのカテゴリーで捉えた上で、「理論」の体系性を3

つに水準化し(現実世界の論理,局所的理論,(準)公理的理論),それが下から上へ漸進的に進んでいく,という考えに基づいている。この枠組みでは,中学校では「現実世界の論理」を引きずりながらも「局所的理論」を中心とした論証指導が行われ,高等学校では「(準)公理的理論」へと移行していくことを想定している。

枠組みに基づくカリキュラム開発研究

本研究における理論的枠組みに基づいてカリキュラム開発を進めていく際,数学的活動との関わりが重要となってくる。本研究のカリキュラム開発において想定している「数学的活動」には図2に示すような3つのカテゴリーがある。それは,「授業において設定される数学的活動」「単元を通して培う数学的活動」「カリキュラムを貫く数学的活動」というカテゴリーであり,互いに関連している。本研究で構築した理論的枠組みは,主として「カリキュラムを貫く数学的活動」に基づく論証指導を捉えるものであり,その基本的アイデアが局所的組織化である。

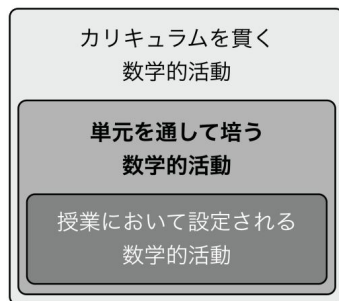


図2: 本研究における数学的活動のカテゴリー

一方で,理論的枠組みの各水準に含まれる「言明」「証明」「理論」の各要素の質が漸進的に深まっていく様子を示すためには,「単元を通じた数学的活動」の層に焦点化して,カリキュラム分析やモデル教材の開発を図る必要がある。そのため本研究では,「準公理的理論」の水準が想定されうる高等学校の「数列」の単元を取り上げて,単元を通して「現実世界の論理 局所的理論 準公理的理論」の展開を分析した。また,数学的活動に基づく論証教材のモデルとして「Sylvesterの自然数定理」を取り上げて,様々な論証活動のタイプや調査研究を通して,本教材が高校数学の内容と活動に相応しい論理性と中学数学の内容と活動に相応しい直観性を兼ね備えていることを明らかにした。

本研究の成果発信

本研究の成果は,2014年6月に東京学芸大学で開催された日本数学教育学会第2回春期研究大会において創成型課題研究を組織し,その中でカリキュラム開発の理念,モデル教材,単元を通じた数学的活動,カリキュラム評価の観点からそれぞれ研究発表を行っている。また以下の「主な発表論文等」で示すように,研究代表者,研究分担者,研究協力

者によって雑誌論文や学会発表の形で研究成果を発信している。さらに3ヶ年の研究成果を総括するため,2015年3月には全234頁からなる「研究成果報告書」を製本し,数学教育関係者に広く配付している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者,研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計27件)

1. 宮川健・真野祐輔・岩崎秀樹・國宗進・溝口達也・石井英真・阿部好貴,「中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導の理論的基盤:カリキュラム開発に向けた枠組みの設定」,全国数学教育学会誌『数学教育学研究』,21(1),63-73,2015. 査読有
2. 溝口達也,“Function and Equation as Tools for Future Construction”, *Proceedings of the 7th International Conference on Educational Research (ICER2014)*, 430-441. 2014. 査読有
3. 宮川健,「研究者と実践者の協働による‘授業化’の仕組みについて:証明することのカリキュラム開発の事例から」,日本数学教育学会誌・数学教育学論究臨時増刊, Vol. 96. 177-184. 2014. 査読有
4. 宮川健 “Functions of proof: a comparative analysis of French and Japanese national curricula and textbooks”. In *Proceedings of International Conference on Mathematics Textbook Research and Development 2014* (pp. 333-338). University of Southampton, UK. 2014. 査読有
5. 真野祐輔,「無理数の学習指導における数学的ディスコースの進展:具象化(reification)の記号論的分析」,日本数学教育学会誌『数学教育学論究』,第96巻・臨時増刊,81-88,2014. 査読有
6. 岩崎秀樹・大滝孝治・杉野本勇氣・岩知道秀樹,「数学教師を目指す教育学部初年次学生の論証認識に関する考察」,日本科学教育学会誌『科学教育研究』,37(3), 226-234, 2013. 査読有
7. 服部裕一郎・岩崎秀樹,「数学教育におけるクリティカルシンキング育成のための教育課程の開発研究:数学科における総合的な学習の時間の授業実践」,全国数学教育学会誌『数学教育学研究』,19(2), 63-71, 2013. 査読有
8. 國宗進・熊倉啓之・松元新一郎「図形の論証の理解とその学習指導:図形の相似に関する補助線を引く方法の意識化」,日本数学教育学会誌・数学教育学論究臨時増刊, Vol. 96, 113-120, 2013. 査読有

9. 溝口達也“Design of problem solving lesson and teacher's assistance: Based on refining and elaborating mathematical activities”, *Proceedings of the 6th East Asia Regional Conference on Mathematics Education, vol.2*, 194-203, 2013. 査読有
10. 山脇雅也・山本靖・溝口達也, 「中学校数学科における関数と方程式の統合カリキュラムの開発研究: 第2学年及び第3学年の授業研究をもとに」, 全国数学教育学会誌・数学教育学研究, 19(2), 185-201, 2013. 査読有
11. 宮川健「幾何領域における証明の存在理由: フランスと日本の場合」, 日本数学教育学会誌・数学教育学論究臨時増刊, Vol. 95, 345-352, 2013. 査読有
12. 石井英真「これからの社会に求められる学力とその評価: 『真正の学力』の追求」『初等教育資料』第89号, 28-31, 2013. 査読無
13. 真野祐輔 “Semiotic chaining and reification in learning of square root numbers: on the development of mathematical discourse”, *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*, 209-216, 2013. 査読有
14. 真野祐輔「平方根の加法の学習における記号論的連鎖と具象化の分析: A. Sfardの数学的ディスコース論の視座から」, 日本数学教育学会誌・数学教育学論究臨時増刊, Vol. 95, 193-200, 2013. 査読有
15. 阿部好貴「数学的モデル化からみた数学的リテラシーの捉え方」, 日本数学教育学会誌・数学教育学論究臨時増刊, Vol. 95, 9-16, 2013. 査読有
16. 岩崎秀樹・入川義克, 「数学科教員養成における学部・大学院連携の教職プログラムの課題と展望」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 18(1), 107-117, 2012. 査読有
17. 入川義克・杉野本勇氣・岩崎秀樹「数学科教員養成における学部・大学院連携のカリキュラム・モデルの研究」, 『日本教科教育学会誌』, 35(2), 31-40, 2012. 査読有
18. 溝口達也「『論証指導』の基盤としての『説明の指導』: 研究ノート」, 鳥取大学数学教育研究, 15(3), 1-9, 2012. 査読無
19. 宮川健「認識論と算数・数学の授業: 基本認識論的モデルの視点から」, 日本数学教育学会・第45回数学教育論文発表会論文集(第1巻), 15-20, 2012. 査読無
20. 宮川健「フランス前期中等学校平面幾何領域における証明の生態: 教科書分析から」, 日本数学教育学会誌・数学教育, 94(9), 2-11, 2012. 査読有
21. 宮川健 “Proof in geometry: a comparative analysis of French and Japanese textbooks”. In Tai-Yih Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.3)*, pp. 225-232, 2012. 査読有
22. 石井英真・神原一之「高次の学力を伸長する指導のあり方に関する一考察: パフォーマンス評価を取り入れた『平方根』の授業実践の分析を通して」, 全国数学教育学会・数学教育学研究, 18(2), 91-98, 2012. 査読有
23. 石井英真「算数・数学教育の立場から: 『数学する活動』を軸にした目標と評価のあり方」『教育目標・評価学会紀要』第22号, 1-8, 2012. 査読有
24. 石井英真「新しい評価の動向: 思考力・判断力・表現力を育てるパフォーマンス評価」『教育展望』, 58(7), 36-40, 2012. 査読無
25. 真野祐輔 “Characterizing the reification phase of variables in functional relation through a teaching experiment in a sixth grade classroom”, *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*, 83-90, 2012. 査読有
26. 真野祐輔「具象化理論に基づく変数性のコンセプトの変容に関する研究: 小学校第6学年における教授実験のデザイン」, 全国数学教育学会誌・数学教育学研究, 18(2), 23-33, 2012. 査読有
27. 阿部好貴「数学的リテラシーという視点からの教授・学習内容の考察: 関数領域に焦点をあてて」, 全国数学教育学会誌・数学教育学研究, 18(1), 23-30, 2012. 査読有
- 〔学会発表〕(計14件)
1. 岩崎秀樹・杉野本勇氣・大滝孝治・岩崎秀樹, 高等学校における論証カリキュラムに関する教授実験(2), 全国数学教育学会第41回研究発表会, 2015年2月1日, 広島大学.
 2. 岩崎秀樹, 教育課程編成の理念を考える: 普通教育としての高校数学, 2014年度数学教育学会秋季例会シンポジウム, 2014年9月26日, 広島大学.
 3. 岩崎秀樹, 中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導のカリキュラム開発, 日本数学教育学会第2回春期研究大会, 2014年6月29日, 東京学芸大学.
 4. 宮川健・溝口達也, 中等教育を一貫する論証指導を捉える枠組みの提案, 日本数

- 学教育学会第 2 回春期研究大会, 2014 年 6 月 29 日, 東京学芸大学 .
5. 真野祐輔・國宗進, 理論的枠組みに基づく「単元を通じた数学的活動」の構想: 単元「数列」における論証指導の系列と課題, 日本数学教育学会第 2 回春期研究大会, 2014 年 6 月 29 日, 東京学芸大学 .
 6. 阿部好貴・石井英真, 数学的リテラシーとしての論証の必要性, 日本数学教育学会第 2 回春期研究大会, 2014 年 6 月 29 日, 東京学芸大学 .
 7. 岩知道秀樹・杉野本勇氣・大滝孝治, 論証教材としての Sylvester の自然数定理, 日本数学教育学会第 2 回春期研究大会, 2014 年 6 月 29 日, 東京学芸大学 .
 8. 真野祐輔, 数学的帰納法の指導における限量詞の扱いと課題, 全国数学教育学会第 40 回研究発表会, 2014 年 6 月 14 日, 大阪教育大学 .
 9. 岩知道秀樹・杉野本勇氣・大滝孝治・岩崎秀樹, 高等学校における論証カリキュラムに関する教授実験 (1), 全国数学教育学会第 40 回研究発表会, 2014 年 6 月 15 日, 大阪教育大学 .
 10. 岩知道秀樹・岩崎秀樹・杉野本勇氣・大滝孝治, 中等教育を一貫する論証指導の意義と課題: 限量詞に着目して, 日本数学教育学会誌第 46 回秋季研究大会, 2013 年 11 月 17 日, 宇都宮大学 .
 11. 真野祐輔・杉野本勇氣, 数学的リテラシーからみえる数学教師教育のパラダイム: 「教科主義」から「能力主義」へ, 日本科学教育学会第 37 回年会, 2013 年 9 月 8 日, 三重大学 .
 12. 石井英真, アメリカにおけるスタンダード運動の展開と高校教育改革: 大学やキャリアとの接続に焦点を当てて, 日本カリキュラム学会第 24 回大会, 2013 年 7 月 6 日, 上越教育大学 .
 13. 阿部好貴, 数学的リテラシーの捉え方に関する基礎的研究: 「文化的手ほどき」としての数学的リテラシー, 全国数学教育学会第 37 回研究発表会, 2013 年 2 月 3 日, 広島大学 .
 14. 溝口達也, 研究方法としての実験教科書, 全国数学教育学会第 36 回研究発表会, 2012 年 6 月 24 日, 岡山大学 .

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩崎 秀樹 (IWASAKI HIDEKI)
広島大学・大学院教育学研究科・教授
研究者番号: 50116539

(2) 研究分担者

國宗 進 (KUNIMUNE SUSUMU)
静岡大学・教育学部・教授

研究者番号: 50214979

溝口 達也 (MIZOGUCHI TATSUYA)
鳥取大学・地域学部・准教授
研究者番号: 70304194

宮川 健 (MIYAKAWA TAKESHI)
上越教育大学・学校教育研究科・准教授
研究者番号: 30375456

石井英真 (ISHII TERUMASA)
京都大学・教育学研究科・准教授
研究者番号: 10452327

阿部 好貴 (ABE YOSHITAKA)
新潟大学・人文社会・教育科学系・准教授
研究者番号: 40624630

真野 祐輔 (SHINNO YUSUKE)
大阪教育大学・教育学部・講師
研究者番号: 10585433