

平成 30 年 4 月 12 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2017

課題番号：24340002

研究課題名(和文) 散在型単純群の諸相

研究課題名(英文) Various aspects of sporadic simple groups

研究代表者

北詰 正顕 (KITAZUME, MASAOKI)

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：60204898

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,600,000円

研究成果の概要(和文)：ラドヴァリス単純群と、関連する代数構造(符号、格子)と組合せ構造(グラフ、デザイン)について研究を行った。その結果、長さ4060の自己双対符号の存在を示し、その生成系を組合せ論的に記述した。また、ユニタリ群から作られる5つのデザインを与え、それらを用いてラドヴァリス群のランク3グラフの新しい構成を与えた。さらに、ラドヴァリス群のグラフとホフマン・シングルトングラフとの関連を述べたコンウェイの定理について考察した。また、2重可移群が作用する極値的な重偶な自己双対符号の分類問題について、残されていたひとつの場合の非存在を示すことにより、分類を完成させた。

研究成果の概要(英文)：We have studied the Rudvalis simple group and related algebraic structures (code, lattice) and combinatorial structure (graph, design). Consequently we show the existence of even self-dual code preserved by the Rudvalis group, and give a combinatorial description of some generator. We further define five 2-designs by using a unitary group, and give a new construction of the Rudvalis graph from these 2-designs. We also consider Conway's theorem, which show the relation between the Rudvalis graph and the Hoffman-Singleton graph. Moreover we have completed the classification of extremal doubly even self-dual codes with 2-transitive automorphism groups by showing non-existence of the remaining case.

研究分野：群論，代数的組合せ論

キーワード：有限群 散在型単純群 符号 格子 グラフ デザイン

1. 研究開始当初の背景

研究代表者による、過去の科学研究費補助金による研究において、有限単純群を自己同型群に持つような代数構造(符号・格子・頂点作用素代数)と組合せ構造(グラフ・デザイン)について、その相互関連を重視しながら、さまざまな成果を上げてきた。特に、散在型単純群が作用する対象は、例外的であるがゆえに、様々な様相を持つが、それゆえに興味深い性質を有している。本研究は、こうした代数構造と組合せ構造の研究を通じて、その自己同型群の構造を調べ、結果として散在型単純群の新たな構成法や特徴付け定理などを目指して、これらの分野の研究に新たな視点が生まれることを期待して研究を開始することとした。

2. 研究の目的

本研究の目的は、有限単純群、中でも、散在型単純群が作用する様々な対象である、代数構造(符号・格子・頂点作用素代数)および、組合せ構造(グラフ・デザイン)について、これらの相互の関連を重視しながら、その構造・性質を調べ、結果として、その自己同型群(の部分群・剰余群)として得られる有限単純群の構造・性質を研究することである。特に、散在型単純群の研究は、一部の群を除くと、十分な研究がなされているとは言えないので、本研究を通じて、新たな視点からの研究を進展させることが目標となる。

本研究では、特に、散在型単純群と関連する格子の問題を中心に、符号・頂点作用素代数やグラフ・デザインとの関連を見ながら考えてゆく。特に、当初の具体的な目標としては、以下の問題に取り組む。

(1) Rudvalis の単純群が作用する長さ 4060 の自己双対符号と、28 次の複素格子に関する、これまでの計算結果を踏まえて、Rudvalis 群の新しい構成を目指す。

(2) Thompson の単純群が作用する 248 次元の格子について、 E_8 型のリー環や、頂点作用素代数との関係を念頭におきながら、格子の性質の研究を進展させる。

(3) Fischler の単純群 F_{22} が作用する 78 次元の複素格子について、グラフや有限幾何を用いた新しい記述、構成につながる研究を進展させる。

3. 研究の方法

本研究に於いては、研究代表者が中心となり、連携研究者、および、千葉大学の大学院生を中心とした研究協力者と、密接な連絡を取りながら、理論的考察と計算機による実証などを組合せながら議論を進めてゆくことが、重要な位置を占める。特に、有限群論全般については、澤辺・千吉良、頂点作用素代数については、安部・島倉、符号やデザインについては、宗政・原田・千吉良などの連携研究者との議論を進める。また、グラフとデザインについては、中空大幸・堀口直之・入

江佑樹などの研究協力者との議論を深める。計算機による計算は、主に、Magma や GAP などの群や組合せ構造の計算に強いパッケージソフトウェアを用いて、符号・格子・デザイン・グラフの構成と、そのパラメータや自己同型群の計算などを行う。これについては、主に、原田・千吉良などの連携を中心として、研究協力者による研究補助が重要な役割を果たすことを期待する。

4. 研究成果

有限単純群が作用する、符号・格子・グラフ・デザインについて研究を進めた結果、下記のような成果を得た。

(1) 2重可移群が作用する extremal 符号の分類に関する Malevich-Willems の論文で未解決であった 1024 次の符号について、Chigira-Harada-Kitazume(2007)の結果の応用として、その非存在の簡明な証明を与えた。これは、分類問題を完成させる重要なステップであると共に、本研究に至る過去の成果の応用例であった。この結果については、連携研究者である千吉良直紀氏および原田昌晃氏との共著論文として発表した。

(2) Rudvalis 単純群が作用する長さ 4060 の自己双対符号の存在は、計算機によって確認されていたが、その生成系がどのようなものか、数学的な記述がはっきりしなかった。本研究では、主に組合せ論的な観点から生成系を記述することを目指した。その結果、ある生成元が、Rudvalis 群のランク 3 グラフにおける "heptad" と呼ばれる対象(あるいは、それらが作る Hoffman-Singleton グラフ)を用いて記述することができた。これは、Conway によって示されていた Rudvalis 群のグラフと Hoffman-Singleton グラフとの関係に、ひとつの意味・応用例を与えたという点が興味深いものと思う。この結果については、千吉良氏との共著論文として投稿中である。

(3) Rudvalis 群が作用する 28 次元の複素格子については、前項(2)における計算を遂行するにあたって重要なものであったが、これまでの文献は精密な記述が少なく、計算しやすい状況になかった。そこで、本研究では、ユニタリ群 $U_3(3)$ を出発点にして正確で使いやすい形に、基礎事項を整理することから始めることとした。

まずユニタリ群 $U_3(3)$ の 28 次の置換表現の記述から始め、ユニタリ空間の直交基底に関する幾何の性質をまとめた。これは $U_3(3)$ を $G_2(2)$ と見たときの generalized hexagon である。ここでは、直交基底と対応する Shrikhande graph を用いた記述が重要であり

，それを活用することで，monomial部分群と呼ばれる $2^7.U_3(3)$ の構成を与えた。

これに基づき，28次元の複素格子における 4060×4 個のminimal vectorの完全なリストを作ることができ，その結果，格子のtheta seriesを求めることができた。ここでは，theta seriesの係数から”pentad”と名付けた，総和が0となる5つのminimal vectorの存在を明らかにしたことが重要である(後述)。

minimal vectorを $\text{mod}(1+i)$ で考えると，5つのデザインを定義することができる。この5つのデザインのブロックに対して，その共通部分の偶奇を用いた単純な条件でグラフの辺を定義することで，Rudvalis群のグラフが再構成できることを示した。これらのデザインのブロックについては， でまとめた $U_3(3)$ の幾何を用いて組合せ論的に記述した。この結果，Rudvalis群のグラフが $U_3(3)$ の言葉で記述出来るという新しい結果が得られた。

前項(2)で述べた”heptad”に関する Conwayの結果について，複素格子における”heptad”の存在を認めると，そこから で述べた”pentad”の性質を用いることによって，Hoffman-Singleton グラフができることを証明することができた。これまで，この Conwayの結果については事実として書かれる以上の記述は見られず，今回の”pentad”を用いた証明は，新しい知見を与えたものである。

最後に，Hoffman-Singleton グラフを用いると，Rudvalis のグラフの1点の近傍に，対称群 S_6 に関連する部分構造(suboctagon)ができることを示した。これは Bruyn(2015)の結果を用いると，グラフの近傍が Ree 群 $2F_4(2)$ の幾何(generalized octagon)から作られることが従う。これは，本研究において構成されたグラフが，元々の Rudvalis 群の構成に用いられたものと同じであることを示すものである。

Monster 単純群に含まれない Rudvalis 単純群については，研究が進んでいるとは言えず，加えて，基本的な文献が整備されていない状況であったと思われる。本研究の成果は，研究の基礎付けを与えながら，新しい結果・知見を得ているものである。以上の成果については，千吉良氏との共同研究として論文にまとめており，9割方完成したところである。

(4) Rudvalis 群のグラフについては Hoffman bound(Delsarte bound)をみたしており，さらに，幾何的(geometric)である可能性を残していた。本研究では，研究協力者(堀口直之氏，中空大幸氏)によって，Rudvalis のグラフは幾何的でない，という結論が得られた。この結果は，堀口氏による研究集会での発表の上，論文として準備中である。

(5) Hoffman-Singleton グラフについては，他の観点からも興味深い対象であり，特に

Conway 群 Co_3 や McLaughlin 群 McL との関係は，以前から研究を進めていた。本研究においては，研究協力者(小林雄介氏)により，3つの対等な Hoffman-Singleton グラフから， Co_3 の2グラフと McL のランク3グラフを構成するという成果を得た。この結果は，小林氏による研究集会での発表の上，論文として準備中である。

(6) 研究目的の具体的な目標として掲げた(2)と(3)については記すべき成果はないが，Fischer 群の問題については，3互換群としての観点からの研究を試みた。その副産物として，3互換群の基礎理論において，その群構造に関する基本定理がひとつの補題を経由することで簡潔に述べられることに気付いた。これについては，研究集会で報告した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

N. Chigira, M. Harada and M. Kitazume, On the Classification of Extremal Doubly Even Self-Dual Codes with 2-Transitive Automorphism Groups, Designs, Codes and Cryptography, 73 (2014), 33-35. (査読有り)

DOI 10.1007/s10623-013-9807-6.

[学会発表](計6件)

 北詰正顕，3互換群に関するちょっとした注意，第29回有限群論草津セミナー，草津セミナーハウス(群馬県草津町)，2017年8月3日

 北詰正顕，直交ラテン方陣と射影平面の話，第28回有限群論草津セミナー，草津セミナーハウス(群馬県草津町)，2016年7月29日

M. Kitazume, The Hoffman-Singleton graph and related topics, Taitung workshop on group theory, VOA and algebraic combinatorics, National Taitung University (Taiwan, Taitung), 2015.03.10

 北詰正顕， Co_3 をめぐるII，第26回有限群論草津セミナー，草津セミナーハウス(群馬県草津町)，2014年8月3日

M. Kitazume, On Rudvalis group II, Hualien workshop on group theory, VOA and algebraic combinatorics, National Dong Hua University (Taiwan, Hualien), 2014.03.23

 北詰正顕，Rudvalis 群の周辺，代数学シンポジウム，東京大学(東京都目黒区)，2014

年 9 月 11 日 (招待講演)

M. Kitazume, On regular subgroups of the Mathieu groups M_{12} and M_{24} , Taitung workshop on group theory, VOA and algebraic combinatorics, National Taitung University (Taiwan, Taitung), 2013.03.28

[その他]

(1) 研究集会等報告集

小林雄介, A construction of the Co_3 two-graph from the Hoffman-Singleton graph, 第 34 回代数的組合せ論シンポジウム報告集, 2017.11, 108-115.

中空大幸・堀口直之, Rudvalis graph の幾何性について, 数理解析研究所講究録 2053, 2017.10, 43-47.

北詰正顕, Rudvalis 群の周辺, 第 59 回代数学シンポジウム報告集, 2015.1, 164-175.

(2) ホームページ

<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~kitazume/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

北詰 正顕 (KITAZUME, Masaaki)
千葉大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 60204898

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

澤辺正人 (SAWABE, Masato)
千葉大学・教育学部・准教授
研究者番号: 60346624

宗政昭弘 (MUNEMASA, Akihiro)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 50219862

千吉良直紀 (CHIGIRA, Naoki)
熊本大学・大学院先端科学研究部・准教授
研究者番号: 40292078

原田昌晃 (HARADA, Masaaki)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 90292408

安部利之 (ABE, Toshiyuki)
愛媛大学・教育学部・教授
研究者番号: 30380215

島倉裕樹 (SHIMAKURA, Hiroki)
東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号: 90399791

(4) 研究協力者

中空大幸 (NAKASORA, Hiroyuki)
堀口直之 (HORIGUCHI, Naoyuki)
入江佑樹 (IRIE, Yuuki)
小林雄介 (KOBAYASHI, Yusuke)