

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 27 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24340003

研究課題名(和文) 平面分割, 交代符号行列の代数的組合せ論と関連する表現論、数理物理学の研究

研究課題名(英文) Algebraic combinatorics of plane partitions and alternating sign matrices, and related representation theory and mathematical physics

研究代表者

岡田 聡一 (Soichi, Okada)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：20224016

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,800,000円

研究成果の概要(和文)：平面分割, 交代符号行列に関連した代数的組合せ論のさまざまな側面を扱った．1. Pfaffian 版 Cauchy-Binet 型公式を見出し, Schur の  $Q$  関数やその一般化に対するさまざまな関係式を証明した．2. Young book の母関数が  $q$ -Selberg 積分の形で表されることを証明した．3. 古典群に対する Pieri 規則を見出し, Burrill 予想に別証明を与えるとともに, その一般化を見出した．4. KP 階層の  $\tau$  関数の展開係数に対する Giambelli 型行列式を見出し, この行列式表示が解を特徴づけることを証明した．

研究成果の概要(英文)：We study various aspects of algebraic combinatorics related to plane partitions and alternating sign matrices. 1. We establish Pfaffian analogues of the Cauchy-Binet formula and prove several identities among Schur  $Q$ -functions and their generalizations. 2. We prove the generating function for Young books can be written as a  $q$ -Selberg-type integral. 3. By establishing Pieri rules for classical groups, we give another proof to Burrill's conjecture and find its generalizations. 4. We find Giambelli-type determinant identities for the expansion coefficients of the  $\tau$ -function of the KP hierarchy, and prove that these determinant identities characterize solutions of the KP hierarchy.

研究分野：組合せ論, 表現論

キーワード：平面分割 交代符号行列 対称関数 Pfaffian KP 階層 複素鏡映群

## 1. 研究開始当初の背景

平面分割, 交代符号行列は代数的組合せ論の核となる対象であり, 表現論, 数理物理学などの他の分野においても重要な役割を果たしている.

交代符号行列 (alternating sign matrix) とは,  $1, 0, -1$  を成分とする正方行列で, 各行, 各列の成分の和がすべて  $1$  であり, 各行, 各列において  $1$  と  $-1$  が交互に現れるようなものである. また, 平面分割 (plane partition) とは, 非負整数を  $2$  次元的に並べた配列  $\forall p_i = (\forall p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  (ただし  $0$  でない成分は有限個) で各行, 各列が広義単調減少であるようなものである. これらのさまざまな形での数え上げ問題の研究を通じて, 数多くの基本的かつ汎用性のある手法が生み出され, 組合せ論だけでなく, 表現論, 確率論など幅広い分野に応用されてきた. 特に, 対称関数や古典群の既約指標などの関係式や, 行列式, Pfaffian に関する公式が見出され, 重要な役割を果たしてきた.

交代符号行列は, 1980 年代に導入されて以来, Weyl の分母公式の変形, Bruhat 順序, square ice model (six-vertex model), fully packed loop model など, 表現論や数理物理学など他分野との関係が徐々に見出されてきた. そして, 対称性を課した交代符号行列の数え上げ問題はほぼ解決を見た. しかし, 対称性を課した交代符号行列の個数と古典群の既約表現の次元の ( $3$  のべきを除いた) 一致や,  $O(1)$  ループモデルにおけるハミルトニアン の Perron-Frobenius 固有ベクトルと交代符号行列の関係を与える Razumov-Stroganov 予想, Weyl の指標公式の交代符号行列による変形と多重 Dirichlet 級数との関係など新たな謎, 予想が生み出されている.

平面分割は  $3$  次元 Young 図形, ひし形によるタイル張り, グラフの完全マッチングとしても理解でき, 表現論に現れる標準盤, 半標準盤なども平面分割の変種とみなすことができる. また, 平面分割の概念は, 半順序集合  $P$  上の  $P$ -partition という形で一般化される. 対称性を課した平面分割の数え上げ問題は一応の解決を見たが, totally symmetric な平面分割の  $q$  数え上げに関する  $q$ -TSPP 予想の証明は計算機の使用が不可欠な証明しか知られておらず,  $q$ -TSPP 予想の人力による証明, 統一的な定式化と見通しのよい証明が望まれている. また, 交代符号行列と totally symmetric self-complementary な平面分割の間の具体的な全単射の構成問題などの未解決問題も残されている. さらに,  $d$ -complete poset 上の  $P$ -partition の母関数に対する  $(q,t)$  フック公式予想も特別なク

ラスでしか証明されていない.

## 2. 研究の目的

この研究は, 他分野との関係を念頭において,

- 平面分割, 交代符号行列などに関するさまざまな未解決問題を解決すること,
- 平面分割, 交代符号行列などのもつさまざまな側面を統一的に説明すること,
- これらの研究を通じて得られた公式, 手法を, 他分野へフィードバックすることを目標とするものである. そして, この目標に向けて,
- 交代符号行列や平面分割の数え上げに現れる母関数の性質を解明すること,
- 母関数が積などの簡明な表示をもつようなよい交代符号行列, 平面分割,  $P$ -partition などのクラスを見出すこと,
- 数え上げ問題に現れる行列式, Pfaffian や対称関数などの関係式の背後にある構造を解明するとともに, 関係式の一般化, 応用を図ること,

などを目的とした.

## 3. 研究の方法

(1)  $C$  型の Weyl の分母公式の交代符号行列による変形に現れる多変数母関数の解析, Stembridge による TSPP 予想の証明で用いられた Pfaffian の構造の解析,  $d$ -complete poset の shifted shape による分解を通じた  $(q,t)$  フック予想の再定式化などを研究の出発点とした.

(2) この研究に関して情報収集, 討論などを行うために, International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Seminaire Lotharingien de Combinatoire など国内外の研究集会, セミナーに参加した. また, 2012 年度には, 7月30日~8月3日に名古屋大学において国際研究集会 “Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'12)” を, 8月6日~10日に国際高等研究所において合宿型セミナー “ヤング図形・統計物理に関連した代数的組合せ論” を開催した.

## 4. 研究成果

(1) Schur の  $Q$  関数とその一般化  
Schur が対称群の射影表現の研究において導入した対称関数 (Schur の  $Q$  関数と呼ばれる) は Schur 関数と並んでさまざまな分野において重要な役割を果たしている. また, Schur の  $Q$  関数やその変種が交代符号行列の組合せ論においても自然に現れる. この研究では, Schur の  $Q$  関数の理論の基礎の整備を行うとともに, 古典型ルート系への拡張を含む一般化についての研究を行った.

この研究では、まず、Schur の  $Q$  関数  $Q_{\lambda}$  に対して成り立ついくつかの公式に対して見通しのよい証明を与えた。Nimmo は  $Q_{\lambda}$  が Pfaffian の比として表されること (Schur 関数の行列式の比による定義にあたる) を Hall-Littlewood 関数を經由して導いているが、この研究では Sylvester の公式の Pfaffian 版 (Knuth による) を利用することで、Nimmo による表示式と Schur が最初に与えた定義式が等価であることを簡単に直接証明することに成功した。また、行列式に対する Cauchy-Binet の公式の Pfaffian 版として、ある形の subPfaffian の積の和を 1 つの Pfaffian として表す公式を見出し、この公式を利用することによって Schur の  $Q$  関数に対する Cauchy 型の公式、skew  $Q$  関数に対する Jozefiak-Pragacz の Pfaffian 公式に簡明な別証明を与えた。さらに、石川-若山の小行列式の和公式の Pfaffian 版も見出し、川中が有限 Chevalley 群の表現論を利用して証明した Hall-Littlewood 関数に対する Littlewood 型公式において  $t = \sqrt{-1}$  と特殊化したものにも別証明を与えた。

次に、Schur の  $Q$  関数の一般化として、Hall-Littlewood 関数の定義において単項式  $x^d$  の部分を一般の  $d$  次多項式  $f_d(x)$  に置き換えて  $t = -1$  としたもの (一般化された  $P$  関数) を考察した。この一般化は、Ivanov によって導入された factorial  $P$  関数、 $Q$  関数や、古典型ルート系に付随した  $P$  関数、 $Q$  関数を含んでいる。上記の Schur  $Q$  関数に対する議論を修正することによって、一般化された  $P$  関数についても、Nimmo 型の Pfaffian の比による表示式、Schur の最初の定義式と同様の Pfaffian 公式、skew  $P$  関数に対する Jozefiak-Pragacz 型公式が成り立つことを証明した。

さらに、 $C$  型ルート系に付随して定まる Hall-Littlewood 関数において  $t = -1$  と特殊化したもの  $Q^C_{\lambda}$  (斜交  $Q$  関数と呼ぶ) について研究を進めた。そして、上記の手法で証明した Jozefiak-Pragacz 型公式を利用することによって、 $Q^C_{\lambda}$  のある種の半標準盤の母関数としての表示式 (King-Hamel の予想) に証明を与えることができた。(同様の議論で、 $C$  型の Weyl の指標公式の変形に現れる多変数母関数が、斜交  $Q$  関数の factorial 版であることを見出した。) さらに、斜交  $Q$  関数の積を斜交  $Q$  関数の線型結合として表したときなどに現れる展開係数が非負整数となるという正值性予想を得るとともに、いくつかの特別な場合に証明を与えた。これらの予想の完全な証明と、表現論的背景の解明が今後の課題として残されている。

(2) 制限付き Cauchy の公式・Littlewood

の公式

Shape や shifted shape に対する  $P$ -partition の母関数を考えるときに鍵となるのが、Schur 関数の和に関する Cauchy の公式や Littlewood の公式である。この研究では、和をとる分割の長さに制限を課した Cauchy 型の公式、Littlewood 型の公式を考察した。Cauchy の行列式や Schur の Pfaffian の一般化を見出すとともに、King の与えた制限付き Cauchy の公式、Littlewood の公式の別証明、その変種、拡張を与えた。そして、応用として、 $\pi_{\{l+1, l+1\}} = 0$  をみたす平面分割の母関数を求めることができた。(Mutafyan-Feigin の得た公式とは異なるものであり、両者が一致することの直接証明は課題として残されている。) また、新たに得た Schur 型の Pfaffian を用いることによって、特別な分割に対応する Schur の  $Q$  関数の Schur 関数による展開公式に代数的な証明を与えた。

(3) Young book と  $q$ -Selberg 積分

Jang Soo Kim (Sungkyunkwan University) と、 $P$ -partition の母関数についての共同研究を行った。この共同研究では、shifted shape, shape の一般化 ( $d$ -complete poset とは別方向) である半順序集合 (Young book) に対する  $P$ -partition の母関数が、Schur 関数のべきの Jackson 積分として表されること (Kim-Oh の結果の  $q$  類似) を証明した。また、Schur 関数に対する Cauchy の公式を用いることによって  $q$ -Selberg 積分公式に簡単な別証明を与えると同時に、古典群の既約指標に対する Cauchy 型の公式を用いることにより新たな  $q$ -Selberg 型の積分公式を見出した。

(3) 古典群の Pieri 規則と半標準盤の組合せ論

群の表現論において既約表現のテンソル積の分解を具体的に決定することは基本的な問題であり、組合せ論などへ応用においても重要な役割を果たしている。この研究では、斜交群、直交群の自然表現の対称テンソル積・交代テンソル積表現と任意の既約表現とのテンソル積の既約分解を組合せ論的に記述する Pieri 規則を証明した。(斜交群、特殊直交群の場合は Sundaram, Weyman による証明も知られている。) この Pieri 規則の応用として、ある種の標準盤と oscillating 盤の個数が等しいという Burrill の予想の表現論的背景を明らかにし、別証明を与える (Krattenthaler, Burrill et al. による組合せ論的な証明もある) とともに、その半標準盤への一般化、変種を見出した。これらの一般化、変種の組合せ論的な証明が課題として残されている。

(4) KP 階層の  $\tau$  関数と Giambelli 型公式

中屋敷 厚 (津田塾大学), 執行 洋子 (津田塾大学) と, KP 階層の  $\tau$  関数の展開係数に関して共同研究を行った. KP 階層の  $\tau$  関数  $\tau(x)$  を Schur 関数で展開したときの係数  $\xi_\lambda$  について,  $\tau(0) = 1$  の場合は一般の分割  $\lambda$  に対応する係数  $\xi_\lambda$  が hook に対応する係数の行列式 (Schur 関数の Giambelli 公式にあたる) として表されることが知られていた. 共同研究では,  $\tau(0) = 0$  の場合にも,  $s_\mu(x)$  を主要項とする KP 階層の  $\tau$  関数について係数  $\xi_\lambda$  が特別な skew shape に対応する係数の行列式で表されること, そしてこの行列式表示によって KP 階層の解が特徴づけられることを証明した. さらに, この共同研究に関連して, 行列式に対する Sylvester の公式の一般化 (Bazin の公式も含む) とその Pfaffian 版を見出し, Giambelli の公式の skew Schur 関数への一般化, Jozefiak-Pragacz の公式の skew Q 関数への一般化を得た. これらの結果は, 論文

[A] A. Nakayashiki, S. Okada, and Y. Shigyo, On the expansion coefficients of the KP hierarchy, arxiv:1704.03659

[B] S. Okada, Generalized Sylvester formulas and skew Giambelli identities, arXiv:1704.02585

にある.

(5) 一般化された parking space

伊藤 洋介 (名古屋大学) と, 一般化された parking space の存在に関して共同研究を行った. 古典的な parking function 全体のなす集合には対称群が作用し, その置換表現の指標が特別な形をしていることが知られており, この置換表現やその一般化については Catalan 組合せ論, Macdonald 対称関数などとの関係から多くの研究がなされている. 共同研究では, 一般の既約な複素鏡映群に対して parking function と同様の形で与えられる類関数 (とその  $q$  類似) が表現の指標となるための条件を完全に決定した. また, 対称群の場合の証明の過程で, Schur 関数の特殊値として得られる整数の最大公約数に関する興味深い現象を見出し, Schur 関数の主特殊化として得られる多項式の係数の単峰性についての予想が得られた. これらの結果は, 論文

[C] Y. Ito and S. Okada, On the existence of generalized parking spaces for complex reflection groups, arXiv:1508.06846

にある.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 33 件)

[1] S. Matsumoto, Polynomiality of shifted Plancherel averages and content evaluations, Ann. Math. Blaise Pascal, 掲載決定 (査読有).

[2] J. Kim and S. Okada, A new  $q$ -Selberg integral, Schur functions, and Young books, Ramanujan J. 42 (2017), 43 - 57 (査読有).

[3] 岡田 聡一, Schur  $Q$ -functions and symplectic  $Q$ -functions, 2016 年度表現論シンポジウム講演集, pp. 111 - 132 (査読無).

[4] S. Okada, Pieri rules for classical groups and equinumeration between generalized oscillating tableaux and semistandard tableaux, Electron. J. Combin. 23 (2016), #P4.43 (査読有). <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v23i4p43>

[5] 石川 雅雄, 中野 文彦, 貞廣 泰造, 田川 裕之, Domino tilings of Aztec rectangles with connected holes, 数理解析研究所講究録, 1992 「組合せ論的表現論とその周辺」 (2016), 114 - 125 (査読無).

[6] T. Nakanishi and S. Stella, Wonder of sine-Gordon  $Y$ -systems, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 6835 - 6886 (査読有).

[7] 岡田 聡一, Generalized parking spaces, 2015 年表現論シンポジウム講演集, 2015, pp.1 - 14 (査読無).

[8] V. J. W. Guo, M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, A quadratic formula for basic hypergeometric series related to Askey-Wilson polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 2003 - 2015 (査読有).

[9] 中西 知樹, Introduction to cluster algebras, 2015 年表現論シンポジウム講演集, 2015, pp. 29 - 38 (査読無).

[10] M. Ishikawa and S. Okada, Identities for determinants and Pfaffians, and their applications, Sugaku Expositions 27 (2014), 85 - 116 (査読有).

[11] 岡田 聡一, Schur-type Pfaffians and their applications to symmetric function identities, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会 無限可積分系セッション特別講演 アブストラクト, 2014, pp. 21 - 31 (査読無).

[12] M. Ishikawa and J. Zeng, Selberg

integrals and Catalan-Pfaffian Hankel determinants, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc.*, AT (2014), 549 - 560 (査読有).

<https://www.dmtcs.org/dmtcs-ojs/index.php/proceedings/article/view/dmAT0148.1.html>

[13] 石川 雅雄, (q,t)-hook formula for birds, 数理解析研究所講究録 1913「ヤング図形・統計物理に関連する代数的組合せ論」(2014), 47 - 66 (査読無).

[14] 石川 雅雄, 田川 裕之, Leaf posets and multivariate hook length property, 数理解析研究所講究録 1913「ヤング図形・統計物理に関連する代数的組合せ論」(2014), 67 - 80 (査読無).

[15] T. Nakanishi and S. Stella, Diagrammatic description of c-vectors and d-vectors of cluster algebras of finite type, *Electron. J. Combin.* 21 (2014) #P1.3 (査読有).

<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v21i1p3>

[16] M. Ishikawa, M. Ito and S. Okada, A compound determinant identity for rectangular matrices, *Adv. in Appl. Math.* 51 (2013), 635 - 654 (査読有).

[17] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinants, *J. Combin. Theory Ser. A* 120 (2013), 1263 - 1284 (査読有).

[18] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, A generalization of Mehta-Wang determinant and Askey-Wilson polynomials, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc. AS* (2013), 719 - 730 (査読有).

<https://www.dmtcs.org/dmtcs-ojs/index.php/proceedings/article/view/dmAS0161.1.html>

[19] S. Matsumoto and T. Shirai, Correlation functions for zeros of a Gaussian power series and Pfaffians, *Electron. J. Probab.* 18 (2013), 1 - 49 (査読有). doi:10.1214/EJP.v18-2545

[20] S. Matsumoto, Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces, *Random Matrices: Theory Appl.* 2 (2013), 1350001 (査読有).

[21] 岡田 聡一, Pfaffian identities and their applications, 2012 年表現論シンポ

ジウム講演集, pp. 69 - 91, 2012 (査読無).

[学会発表](計 42 件)

[1] S. Matsumoto, Plancherel measures on strict partitions: Polynomiality and limit shape problems, Workshop on Asymptotic Representation Theory (2017 年 2 月 20 日, Institut Henri Poincare, Paris, France).

[2] 岡田 聡一, Schur functions and Schur Q-functions, 2016 年度表現論シンポジウム (2016 年 12 月 1 日, オキナワグランメーブルリゾート, 沖縄)

[3] S. Okada, Pieri rules and oscillating tableaux, 77th Seminaire Lotharingien de Combinatoire (2016 年 9 月 12 日, Strobl, Austria).

[4] S. Okada, Pfaffian identities and Q-functions, 76th Seminaire Lotharingien de Combinatoire (2016 年 4 月 4 日, Ottrott, France).

[5] T. Nakanishi, Generalized cluster algebras and dilogarithms of higher degree, 5th Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Hurwitz Numbers and Cohomological Field Theories (2016 年 6 月 11 日, Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia).

[6] S. Okada, On the existence of generalized parking spaces for complex reflection groups, 2015 Combinatorics Workshop (2015 年 7 月 16 日, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea).

[7] S. Okada, Generalized Cauchy determinant and Schur Pfaffian, and their applications, Lattice Models: Exact Methods and Combinatorics (2015 年 5 月 21 日, Galileo Galilei Institute for Theoretical Physics, Firenze, Italy).

[8] S. Okada, On the existence of generalized parking spaces for complex reflection groups, Dynamical Algebraic Combinatorics (2015 年 3 月 25 日, American Institute of Mathematics, San Jose, U.S.A.).

[9] M. Ishikawa, The domino tilings of Aztec rectangles with consecutive holes and the Gauss hypergeometric series, 2015 Combinatorics Workshop (2015 年 7 月 16 日, National Institute for Mathematical

Sciences, Daejeon, Korea) .

[10] 松本 詔, Weingarten calculus と対称群の調和解析, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 函数解析学分科会特別講演 (2015 年 9 月 14 日, 京都産業大学, 京都) .

[11] 中西 知樹, Introduction to cluster algebras, 2015 年度表現論シンポジウム (2015 年 11 月 18 日, 公共の宿おおとり荘, 伊豆長岡) .

[12] 岡田 聡一, Schur-type Pfaffians and their applications to symmetric function identities, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 無限可積分系セッション特別講演 (2014 年 9 月 25 日, 広島大学, 広島) .

[13] S. Okada, Pfaffian formulae and their applications to symmetric function identities, 73rd Seminaire Lotharingien de Combinatoire (2014 年 9 月 9 日, Bundesinstitut für Erwachsenenbildung, Strobl, Austria) .

[14] S. Okada, Restricted Littlewood formulae and minor summation formula, 19th International Linear Algebra Society Conference, Minisymposium on Algebraic Combinatorics and Combinatorial Matrices (2014 年 8 月 9 日, Sungkyunkwan University, Seoul, Korea) .

[15] S. Okada, Greatest common divisors of specialized Schur functions, 72nd Seminaire Lotharingien de Combinatoire (2014 年 3 月 25 日, Universite Lyon 1, Lyon, France) .

[16] M. Ishikawa, Selberg integrals and Catalan-Pfaffian Hankel determinants, 19th International Linear Algebra Society Conference, Minisymposium on Algebraic Combinatorics and Combinatorial Matrices (2014 年 8 月 8 日, Sungkyunkwan University, Seoul, Korea) .

[17] M. Ishikawa, Selberg integrals and Catalan-Pfaffian Hankel determinants, 73rd Seminaire Lotharingien de Combinatoire, 2014 年 9 月 10 日, Bundesinstitut für Erwachsenenbildung, Strobl, Austria) .

[18] S. Okada, Hook product formulae, Asian Mathematical Conference, Special Session on Combinatorics / Graph Theory / Cryptography / Coding Theory (2013 年 7 月 2 日, BEXCO, Busan, Korea) .

[19] M. Ishikawa,  $(q, t)$ -hook formula for birds and banners, Infinite Analysis: Past, Present and Future, Bethe Ansatz, Quantum Groups and Beyond (2013 年 3 月 9 日, 京都大学数理解析研究所, 京都) .

[20] T. Nakanishi, Wonder of sine-Gordon Y-system, Algebra, Combinatorics and Representation Theory: in memory of Andrei Zelevinsky (2013 年 4 月 27 日, Northeastern University, U.S.A.)

[21] 岡田 聡一, Pfaffian identities and their applications, 表現論シンポジウム (2012 年 12 月 5 日, 鹿児島マリンパレス, 鹿児島) .

[22] S. Okada, Symmetric functions and branching rules for spinor representations, 2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics (2012 年 8 月 18 日, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China) .

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

〔その他〕

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岡田 聡一 (Soichi OKADA)  
名古屋大学大学院多元数理科学研究科・教授  
研究者番号: 20224016

### (2) 研究分担者

石川 雅雄 (Masao ISHIKAWA)  
岡山大学大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号: 40243373

松本 詔 (Sho MATSUMOTO)  
鹿児島大学 理工学域理学系・准教授  
研究者番号: 60547553

中西 知樹 (Tomoki NAKANISHI)  
名古屋大学大学院多元数理科学研究科・教授  
研究者番号: 80227842

### (3) 連携研究者

### (4) 研究協力者