

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 4 月 26 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24340006

研究課題名(和文)高次元アフィン代数多様体の構造とユニポテント幾何

研究課題名(英文)Structure of higher-dimensional algebraic varieties and unipotent geometry

研究代表者

宮西 正宜 (Miyanishi, Masayoshi)

関西学院大学・数理科学研究センター・客員研究員

研究者番号：80025311

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,200,000円

研究成果の概要(和文)：アフィン直線またはアフィン平面を一般ファイバーとするファイバー構造をもつ代数多様体の構造はかなり詳細に記述できるようになった。また、1次元トーラス C^* をファイバーとする場合にも同様である。代数多様体のトポロジーと関連して構造を調べているところに特徴がある。

2014年7月に京都大学数理解析研究所において、国際研究集会「algebraic varieties and automorphism groups」を開催し、20数名の外国人研究者の参加があった。その報告集を日本数学会「Advanced Studies in Pure Mathematics」の75巻として2017年度に発刊する。

研究成果の概要(英文)：Structures of algebraic varieties endowed with A_1 -fibrations or A_2 -fibrations have been clarified to a satisfactory level. Structures of those with C^* -fibrations have been explored as well. Topology of algebraic varieties as well as their structures is described, and this is one particular aspect of our research.

An international workshop on Algebraic Varieties and Automorphism Groups was held at RIMS of Kyoto University in July, 2014 with more than 20 foreign participants, and its proceedings will be published within the year 2017 as the volume 75 of Advanced Studies in Pure Mathematics of the Mathematical Society of Japan.

研究分野：数学

 キーワード：アフィン代数多様体 ユニポテント群の作用 局所べき零導分 商多様体 商特異点 シリンダー Fan
o多様体 自己同型写像

1. 研究開始当初の背景

(1) アフィン空間とアフィン代数多様体に関する研究はアフィン代数幾何学と呼ばれている。以下、 n 次元アフィン空間を A^n と表す。アフィン代数幾何学の種々の問題を研究する過程で、与えられた代数多様体に何次元の A^n を、どれだけ多く埋め込むことができるかという問題の重要性が明らかになってきた。このように埋め込まれたアフィン空間を通して代数多様体の構造を研究する幾何学を **ユニポテント幾何** と呼ぶ。ユニポテント群がアフィン代数多様体上に作用する場合に、その商射から生じる A^n -ファイブレーション構造を研究する問題はその一例である。

(2) 代数曲面の場合に有効であった、非完備代数曲面を、射影的代数曲面とその上の被約な有効因子の組を研究することによって研究するという手法(対数的代数幾何)は、3次元以上の場合に射影的代数多様体の構造が十分に解明されていないので、必ずしも十分な研究手段を提供しない。補完的ではあるが、ファイブレーションによって高次元多様体を低次元のものに分解して研究するという立場が有効である。ファイバー空間(ファイブレーションをもつ代数多様体)の構造を調べるには、代数的変換群論と代数的位相幾何学も重要な道具になる。

(3) 研究代表者は、過去の萌芽研究(2004-2005)、基盤研究(C)(2006-2008)、基盤研究(C)(2009-2012)によって、これらの問題を研究してきた。また、研究分担者の増田佳代と協力して「アフィン代数幾何学研究集会」を2008年3月より6カ月ごとに連続8回開催してきたが、この研究集会を拠点とする国内研究者数が増え、外国人研究者との交流が必要になってきている。この分野における世界の研究者を集めた国際研究集会を企画する時期に来ている。

2. 研究の目的

次の4課題について研究を進める。

(1) 3次元以上の高次元アフィン代数多様体の構造(特に、位相的に可縮な非特異3次元多様体)を、 A^1 -ファイブレーションまたは加法群 G_a (より一般には、ユニポテント代数群)の作用を用いたユニポテント幾何と、 C^* -ファイブレーションまたは乗法群 G_m の作用を用いて解明する。

(2) 対数的極小モデル・プログラムを用いて、3次元アフィン代数多様体の完備化モデルの構造を解明する。

(3) 商多様体となる、対数的小平次元が0以上の正規アフィン曲面の構造と特異点を解明する。

(4) 局所べき零導分を用いて A^3 の自己同型群の部分群と A^3 上の幾何の関連を解明する。

3. 研究の方法

(1) 課題1については、 A^1 -(または C^* -)フ

アイブレーションをもつ位相的に可縮な3次元非特異アフィン代数多様体の構造と分類を中心に行う。また、 $C[x,y]$ または $C[x,y,z]$ 上の代数的導分 D (任意の元 a に対して $D^n(a) (\forall n \in \mathbb{N})$ で C 上張られたベクトル空間が有限次元であるもの) の分類を行う。

(2) 課題2については、Fano多様体 V 上の豊富因子 D を取り、 $V-D$ が A^1 -シリンダーや C^* -シリンダーをもつための必要十分条件を与える。また、3次元可縮多様体の有理性や affine-ruledness を証明する。さらに A^1 -(または C^* -)ファイブレーションに現れる2次元ファイバー成分の取り扱いと、特異ファイバーの基底代数曲面上の軌跡の研究が重要である。

(3) 課題3については、商空間として現れる小平次元0,1のホモロジー平面 X の自己同型群を決定する、有限群 G が X に忠実に作用するとき X/G の位相的・幾何学的構造と特異点を決定する、 X を正規アフィン代数曲面、 X^0 をその非特異部分、 V を X^0 上のベクトル束とする。3次元アフィン代数多様体 Y がファイブレーション $f: Y \rightarrow X$ をもち、 $f^{-1}(X^0)=V$ となるときの Y の構造を決定する。

(4) 課題4については、 $\text{Aut}(A^3)$ の順(tame)自己同型部分群の外側に位置する部分群を $\exp(\quad)$ (\quad は局所べき零導分) の形で多く与えられることが発見されている。 $\text{Aut}(A^3)$ がこれらの部分群で生成されるかという問題は重要である。

4. 研究成果

(1) 課題1については、アフィン直線 A^1 またはアフィン平面 A^2 をファイバーとするファイブレーションの構造をもつ3次元代数多様体の構造や位相、また、ユニポテント群の作用による3次元代数多様体の商射について基本的結果を得た(論文、など)に収録)。論文では、アフィン代数曲面上の A^1 -ファイブレーションの変形で、アフィン型(基底曲線がアフィン曲線)と完備型(基底曲線が完備曲線)が保たれることを示した。

(2) 課題2については、岸本 崇が Yuri Prokhorov や Mikhail Zaidenberg と協力して種々の結果を出している。とくに、Fano多様体上の affine cone を考慮することが大切である。

(3) 課題3については、代数曲面 X/G_a の特異点と商射 $X \rightarrow X/G_a$ の特異ファイバーについて基本的知見を得ている。これらの結果は現在投稿中である。

(4) 課題4については、黒田 茂が Shestakov-Umirbaev の理論を整備して可換なユニポテント群の作用に適用できるようにした。順でない自己同型写像は野性的(wild)と呼ばれるが、野性的であるための様々な判定条件を得ている(論文、など)。局所べき零導分に関しては研究代表者および研究分担者がそれぞれ興味を以って取り組んだ。

(5) 「Kyoto Workshop on Algebraic Varieties and Automorphism Groups」という国際研究集会を、2014年7月7日-11日の期間、京都大学数理解析研究所で成功裡に開催した。出席者は、外国人研究者 20 数名を含む 70 余名であった。その報告集は日本数学会のシリーズ「Advanced Studies in Pure Mathematics」の第 75 巻として、2017 年度に刊行される予定である。(図書 を参照。)同集会の開催には、本基盤研究(B)からの拠金と数理解析研究所からの支援金を用いた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 42 件)

宮西 正宜, 増田 佳代, R.V. Gurjar, Unipotent group actions on projective varieties, Advanced Studies in Pure Mathematics, 査読有, 75 巻, 2017 (刊行予定), 119-162.

DOI: 未定

小島 秀雄, Irrational open surfaces of non-negative logarithmic Kodaira dimension, Advanced Studies in Pure Mathematics, 査読有, 75 巻, 2017 (刊行予定).

DOI: 未定

岸本 崇, Adrien Dubouloz, Explicit biregular/birational geometry of affine threefolds: completions of A^3 into del Pezzo fibrations and Mori conic bundles, Advanced Studies in Pure Mathematics, 査読有, 75 巻, 2017 (刊行予定).

DOI: 未定

黒田 茂, Gene Freudenburg, Cable algebras and rings of G_a -invariants, Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, 掲載決定.

DOI: 未定

宮西 正宜, Wild Z/pZ -actions on algebraic surfaces, J. Algebra, 査読有, 477 巻, 2017, 360-389.

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.12.025

増田 佳代, Families of hypersurfaces with noncancellation property, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, 145 巻, 2017, 1439-1452.

DOI: 10.1090/proc/13489

宮西 正宜, R.V. Gurjar and S. Chakraborty, Pure subrings of commutative rings, Nagoya Math. Journal, 査読有, 221 巻, 2016, 33-68.

DOI: 10.1017/nmj.2016.2

宮西 正宜, 増田 佳代, R. V. Gurjar, Affine threefolds with A^2 -fibrations, Trans. Groups, 査読有, 22 巻, 2016, 187-205.

DOI: 10.1007/s00031-016-9379-4

岸本 崇, Adrien Dubouloz, Families of

affine ruled surfaces: Existence of cylinders, Nagoya Math. J., 査読有, 223 巻, 2016, 1-20.

DOI: 10.1017/nmj.2016.22

黒田 茂, Degeneration of tame automorphisms of a polynomial ring, Comm. Algebra, 査読有, 44 巻, 2016, 1196-1199.

DOI: 10.1080/00927872.2014.999935

黒田 茂, Weighted multidegrees of polynomial automorphisms over a domain, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 68 巻, 2016, 119-149.

DOI: 10.2969/jmsj/06810119

宮西 正宜, S. Chakraborty and R.V. Gurjar, Factorially closed subrings of commutative rings, Algebra and Number Theory, 査読有, 9 巻, 2015, 1137-1158;

DOI: 10.2140/ant.2015.9.1137

小島 秀雄, T. Nagamine, Closed polynomials in polynomial rings over integral domains, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, 219 巻, 2015, 5493-5499

DOI: 10.1080/00927872.2013.879876

岸本 崇, Adrien Dubouloz, Log uniruled affine varieties without cylinder like open subsets, Bulletin de la Soc. Math. France, 査読有, 143 巻, 2015, 383-401.

http://smf4.emath.fr/Publications/Bulletin/143/html/smf_bull_143_383-401.php

黒田 茂, On the Karas type theorems for the multidegrees of polynomial automorphisms, J. Algebra, 査読有, 423 巻, 2015, 441-465.

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.10.024

宮西 正宜, R.V. Gurjar, M. Koras and P. Russell, A homology plane of general type can have at most a cyclic quotient singularity, J. Algebraic Geometry, 査読有, 23 巻, 2014, 1-62.

DOI: 10.1090/S1056-3911-2013-00602-5

宮西 正宜, 増田 佳代, R.V. Gurjar, Deformations of A^1 -fibrations, Automorphisms in birational and affine geometry, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 査読有, 2014, 327-361.

DOI: 10.1007/978-3-319-056814-4-19

増田 佳代, Characterizations of hypersurfaces of a Danielewski type, J. Pure and Applied Algebra, 査読有, 218 巻, 2014, 624-633

DOI: 10.1016/j.jpaa.2013.08.002

宮西 正宜, 増田 佳代, R.V. Gurjar, Deformations of A^1 -fibrations, Automorphisms in birational and affine geometry, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 査読有, 2014, 327-361.

DOI: 10.1007/978-3-319-056814-4-19

岸本 崇, Yuri Prokhorov, Mikhail Zaidenberg, Unipotent group actions on del Pezzo cones, Algebraic Geometry, 査読有, 1巻, 2014, 46-56.

DOI: 10.14231/AG-2014-003

〔学会発表〕(計 68 件)

宮西 正宜, Affine threefolds with G_a -actions, Conference on Complex affine geometry, hyperbolicity and complex analysis, 2016 年 10 月 23 日, Grenoble (France).

岸本 崇, Five lectures on minimal model programs, 39th Autumn School in Algebraic Geometry, COMPLEX AFFINE GEOMETRY, 2016 年 9 月 18-24 日, Lukecin (Poland).

小島 秀雄, Some results on open algebraic surfaces of non-negative logarithmic Kodaira dimension, KIAS-TIFR-ICTS Joint Advanced School of Algebraic Surfaces and Related Topics, 2015 年 11 月 30 日, Bangalore (India).

岸本 崇, Cylinders in del Pezzo fibrations, Impanga seminar at Polish Academy of Sciences, 2015 年 2 月 20 日, Warsaw (Poland).

宮西 正宜, Unipotent group actions on projective varieties, International Workshop on Algebraic Varieties and Automorphism Groups, 2014 年 7 月 8 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市左京区).

増田 佳代, Two lectures on locally nilpotent derivations, Conference on automorphisms of affine varieties, 2014 年 2 月 22, 24 日, Kozhikode (India).

小島 秀雄, Open algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension zero, アフィン代数幾何学研究集会, 2013 年 9 月 7 日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府・大阪市北区).

岸本 崇, Minimal model program after resolutions of pencils of cubic surfaces and non-standard embeddings of A^1 into A^3 , アフィン代数幾何学研究集会, 2013 年 3 月 4 日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府・大阪市北区).

宮西 正宜, A^1 -fibrations and C^* -fibrations on affine threefolds, Conference on the topology of algebraic varieties (September 21-28), 2012 年 9 月 27 日, Montreal (Canada).

黒田 茂, 多項式環の野生自己同型, 日本数学会, 秋季総合分科会, 代数学分科会特別講演, 2012 年 9 月 21 日, 九州大学(福岡県・福岡市).

黒田 茂, 多項式自己同型の多重次数に関する Karas 型定理, アフィン代数幾何学研

究集会, 2012 年 9 月 8 日, 関西学院大学梅田キャンパス(大阪府・大阪市北区).

宮西 正宜, C^* -fibrations on affine threefolds, Conference on birational and affine geometry, 2012 年 4 月 24 日, Moscow (Russia).

〔図書〕(計 3 件)

増田 佳代, 小島 秀雄, 岸本 崇, 宮西 正宜, Mikhail Zaidenberg, Algebraic Varieties and Automorphism Groups, Advanced Studies in Pure Mathematics 75, 日本数学会, 2017, 474.

宮西 正宜, 増田 佳代, 代数曲線入門, 共立出版, 2016, 161

増田 佳代, 小島 秀雄, 岸本 崇, Affine Algebraic Geometry, World Scientific Publ. Co. 2013, 330

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮西 正宜 (MIYANISHI, Masayoshi)

関西学院大学・数理科学研究センター・客員
研究員

研究者番号: 80025311

(2) 研究分担者

増田 佳代 (MASUDA, Kayo)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号: 40280416

小島 秀雄 (KOJIMA, Hideo)

新潟大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号: 90332824

岸本 崇 (KISHIMOTO, Takashi)

埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 20372576

黒田 茂 (KURODA, Shigeru)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 70453032