

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 19 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24340007

研究課題名(和文)代数的スタックの特性類とその数え上げ幾何への応用

研究課題名(英文)Characteristic classes of algebraic stacks and application to enumerative problems

研究代表者

大本 亨 (Ohmoto, Toru)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：20264400

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,500,000円

研究成果の概要(和文)：古典的代数幾何に遡る「特異点の数え上げ幾何」の基礎付けは未だに完全ではない。これに向けて、本申請課題では種々のモジュライ空間上での特異チャーン類理論を整備した。特に、非特異代数多様体の点ヒルベルト・スキームのホモロジー特性類に関するゼータ関数について一連の研究を完成させた。また、同変特異チャーン類理論を写像の特異点分類に応用し、特異ミルナー数等の計算方法にブレークスルーを与えた。

研究成果の概要(英文)：Seeking for the complete foundation of the enumerative theory of singularities of maps, I have developed singular Chern class theory on various moduli spaces; in particular, together with collaborators I completed a sequence of works on zeta functions of homology characteristic classes of Hilbert schemes of points on a non-singular variety; I applied the theory of equivariant singular Chern classes to the classification theory of map-germs, that made a new breakthrough for computing singular Milnor numbers.

研究分野：特異点論

キーワード：特異点論 特性類理論 チャーン類 トム多項式 数え上げ幾何

1. 研究開始当初の背景

(1) 代数幾何(古典から現代へ): セグレ, エンリケス, カステルヌヴォらのイタリア学派,あるいはサーモン, ケーリー, ベーカーらの英国学派に代表される 19 世紀の古典的代数幾何において,射影代数多様体の不変量の研究は,ある種の射影の特異点の個数を数え上げることによってなされていた(ポーラ-多重度など).こうした古典的研究における基礎付けの部分が 20 世紀中葉に批判に晒されて,ヴェイユやグロタンディークらにより近代的な代数幾何学が創始された.代数多様体の不変量の器には K 群やチャウ群あるいはサイクル写像を通して位相的な(コ)ホモロジー群などがあり,それらの間を結ぶ自然変換としてグロタンディーク・リーマン・ロッホ公式がある.特に 70 年代にはフルトンとマクファーソンによって代数幾何的交叉理論の基礎付けが確立し,古典的不変量は交叉理論を通して,特性類の計算に帰着される構図が出来上がった.しかし,往々にして特異な空間が重要な対象となり,そうした場合での交叉理論はまだ十分に発展していない.一方,代数幾何創成期にすでに,圏論的に空間を定式化する概念として,グロタンディークは代数的スタックを導入していた.線形空間のモジュライ空間がグランスマン多様体であるが,非線形な対象のモジュライ空間は代数的スタックの理論を通して与えられる.特にマンフォードは 83 年の論文において,曲線のモジュライをドリーニュ-マンフォード・スタック(DM スタック)として定式化し,その上の交叉理論の構築を提唱した.これは DM スタック上の特異リーマン・ロッホ理論を基礎にするものであった.この論文以降,昨今の代数幾何においては,種々のスタック(アルティン・スタック)上のチャウ群や K 群,リーマン・ロッホ,交叉理論の整備と活用が中心的な話題と言っても過言ではない.

(2) トポロジーと特異点理論: 多様体の射影などの写像の特異点にはいろいろなタイプがあり,それぞれのタイプの特異点の数え上げが 19 世紀後半の古典的文献において調べられていた.20 世紀中葉に微分トポロジーの側から,ルネ・トムにより可微分写像の特異点論が創始され,関数や写像の特異点の局所分類理論が 70 年代以降に盛んに発展した.この現代的な特異点理論から古典的結果を見直すために,「数え上げ幾何」と「特性類とコボルディズム理論」の間をつなぐ確固たる理論が必要とされる.代表者はこれを「トム多項式理論」と呼びたい.これは 19 世紀の数え上げ幾何の基礎付けを与える理論(言わば非線形シューベルト算法)の総称である.

2. 研究の目的

代表者の関心は,特異空間あるいは分類スタック上のしかるべき“特異リーマン・ロッホ型”理論を整備すること,さらにそれを

用いたトム多項式理論の確立である.特に商スタックに対するチャーン・マクファーソン類自然変換を確立し,さらにヒルツェブルフ類変換の導入を行う.これらの自然変換を元にして,特異点の分類スタックに適用し,古典的数え上げ幾何やシューベルト算法などの整備に寄与することを目的とする.

3. 研究の方法

トムらの仕事を端緒とするトポロジーの研究において,コボルディズムや分類空間および同変コホモロジー理論は 60 年代には既に確立していた.しかし,代数幾何側での対応物は近年まで十分には出来ていなかった.90 年代後半に代数幾何的ポレル構成(トータロ)を下敷きにしてフルトン門下のエディディンとグラハムにより同変交叉理論が整備された.これにより,商スタック上の交叉理論が与えられる.そこで,これを基礎に商スタック上の特異リーマン・ロッホ型定理を探求する.

また,レビン-モレルにより,複素コボルディズムの代替版といえる代数的コボルディズム理論が導入された.こうした代数幾何的道具立てを元にして,トポロジーや特異点理論側で培われたアイデアを数え上げ幾何やシューベルト算法等に適用し発展させる.

特異点理論の側では,90 年代以降,リマーニヤカザリアンらや代表者により,トム多項式理論が急速に整備されつつある.特にスタック上の交叉理論の枠組みによりこの理論を整備することにはたいへん意味がある.事実,多重特異写像芽の分類空間はある種のアルティン・スタックとして与えられるべきであり,その上での交叉理論の構築が待たれる.

4. 研究成果

(1) 特性類自然変換: 代表者の先行研究で同変チャーン・マクファーソン理論が導入された.本研究では,これを商スタック(特に準射影的 DM スタック)に対するチャーン・マクファーソン自然変換に書き換え,さらにトッド類変換(特異リーマン・ロッホ),ヒルツェブルフ類変換にまで拡張した.アルティン・スタックへの拡張も検討したが,一般には難しい.今後の課題である.

(2) 特性類のゼータ関数: 非特異多様体の点ヒルベルト・スキームについて,そのヒルツェブルフ特性類を係数とする母関数を取る.このデグリーを取れば,ヒルベルト・スキームの χ_y 種数の母関数を得る.デグリーの代わりにチャウ射により対称積に押し出した像を係数とする母関数を考えるとところが新しい着眼であって,代表者らはこの母関数のオイラー積型表示公式を導いた(カペル,マキシム,シュアマンと研究分担者の與倉昭治教授との共同研究).この公式は弦理論に

おける 0 次元 MNOP 予想のホモロジー特性類版公式を導く。これにより、代表者による先行研究を元にして始められた「対称積の特性類のゼータ関数」に関する一連の研究がひとまず一段落した。これは代表者の中長期的研究計画の第 1 ステップであって、主たる目標は「相対ヒルベルト・スキームの特性類のゼータ関数」である。これには写像の特異点(トム多項式)が本質的に絡んできて、現代の数え上げ幾何と大いに関連する。

(3) シューベルト算法：研究分担者の成瀬弘教授ら共に 2012 年日本数学会 MSJ-SI “Schubert Calculus” を開催し、シューベルト算法およびトム多項式の専門家を多数招聘し、先端的な国際研究交流を行った。結果、たいへん実りの多い集会であった。代表者らは、諸専門家との交流から多くの知見を得た。例えば、グラスマン多様体あるいは旗多様体のシューベルト多様体の同変チャーン・マクファーソン類を具体的に計算する仕事(ミハルシーら)について情報交換した。成瀬教授らは、ラグランジュ写像のトム多項式理論(カザリアン)に関係して、一般古典群におけるシューア多項式の統一理論を築いた。さらに K 群やコボルディズム群でのシューベルト算法を進展させた。

(4) 写像芽の A-分類と消滅サイクル: 可微分写像芽の A-分類理論(左右分類)において、種々の(特異)ミルナー数が定義されるが、今まではこの計算例はかなり限定的であった。そこで、代表者の同変チャーン・マクファーソン類を応用して、擬斉次写像芽の臨界値跡の同変チャーン類の計算することで、特異ミルナー数の新しい計算方法を提案した。特に今まで全く手が付かなかったコランクが 2 以上の写像芽も扱うことが出来る。現在、特異ミルナー数について所謂「モンド予想」がホットな話題であり、我々のアプローチは一つのブレイクスルーとなった。これについては、大規模で著名な特異点論国際会議「Real and Complex Singularities」(サンカルロス, 2012 年)において、代表者が集中講演を行った。この講義録は今後この方面でたいへん意味を持つと考える。

(5) 古典的数え上げ公式の再考: 比較的低次元の写像芽の A-分類理論は、特にリバブル学派によって 90 年代に盛んに研究された。そこで A-分類に対するトム多項式理論を開拓し、それを古典的数え上げ幾何に応用するプロジェクトを大学院生達と立ち上げた。まず手始めに、平面間の写像芽の既知の A-特異点型に対するトム多項式をすべて決定した。さらにこの結果を応用して、3 次元射影空間内にある代数曲面の数値的射影不変量に関する数多ある「博物学的」業績群(サロモン・ケーリーら 19 世紀の古典的成果)を現代的な視点から整備・拡張する統一的手法を開

拓した。これについて、大学院生と共著を 2 編まとめて投稿中である。また、2015 年 4 月にポーランドで行われた国際会議にて成果発表を行った。さて、このような未整理のままの古典的公式群は多く残されており、このプロジェクトは今後の展開が期待できる。

(6) 半代数的集合上の積分理論: 塩田昌弘氏(名大名誉教授)と共に、実半代数多様体の三角形分割に関するたいへん基本的な定理を得た: X を実半代数多様体とすると、ある多面体 K から X への同相写像 h で (K のある近傍上で) C^1 級であるものが構成できることを証明した。ただし、一般には逆写像は可微分ではないことに注意する。基礎体は任意の(非アルキメデス的でもよい)実閉体でよい。この定理により、実半代数多様体上の微分形式の積分理論が通常の高次元多様体の積分理論と形式的に全く同様に展開できる。特にその応用として、幾何学的測度論を援用することなく、コンセビッチ・ソイベルマンによる区分的代数空間上のド・ラーム理論の簡明な基礎付けが与えられる。また、この理論は、諏訪立雄名誉教授(研究分担者)が進めている「解析的交叉理論」の構築を準備する上で基本的である。なお、諏訪教授はチェック・ドラーム理論(特にチェック・ドルボー理論)を整備し、特に複素正則写像の不動点定理への応用について、イタリアの研究者達(アバーテ、プラッチら)と国際共同研究を進展させている。

(7) その他: 実および複素解析的写像の構造安定性に関する長らく未解決だった問題を厳密に扱い、ほぼ解決した(塩田教授らとの共同研究)。また、大学院生との共同研究として、有限圏のホイットニー特性類自然変換を導入し、計算プログラムを実装した。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

T. Ohmoto, Singularities of Maps and Characteristic Classes, Adv. Stud. Pure Math. vol. 68 (Math. Soc. Japan), Proc. Real and Complex Singularities (Sao Carlos, Brazil, 2012) (2016), 171-245. ISBN:978-4-86497-030-3 (査読有)

T. Ikeda, L. Mihalea, and H. Naruse, Factorial P- and Q-Schur functions represent equivariant quantum Schubert classes, (掲載予定) Osaka Journal of Mathematics (2016). (査読有)

M. Nakagawa and H. Naruse, Generalized (co)homology of the loop spaces of

classical groups and the universal factorial Schur P- and Q-functions, (掲載予定) Adv. Stud. Pure Math. (Math. Soc. Japan) (2016) (査読有)

C. Bisi, F. Bracci, T. Izawa and T. Suwa, Localized intersection of currents and the Lefschetz coincidence point theorem, (掲載予定) Annali di Matematica Pura ed Applicata, (2016). DOI:10.1007/s10231-015-0480-4 (査読有)

A. Lascoux and H. Naruse, Finite sum Cauchy identity for dual Grothendieck polynomials, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. Vol 90, No.7 (2014), 87-91. (査読有)

T. Suwa, GSV-indices as residues J. of Singularities, 9 (2014), 206-218 (査読有)

J. Scheurmann, S. Yokura, Motivic bivariant characteristic classes. Adv. Math. 250 (2014), 611-649. (査読有)

S. E. Cappell, L. Maxim, J. Schuermann, J. L. Shaneson, S. Yokura, Characteristic classes of symmetric products of complex quasi-projective varieties, Jour. für die Reine und Angewandte Math. (2015), 1.43; DOI:10.1515/crelle-2014-0114 (査読有)

S. Cappell, L. Maxim, T. Ohmoto, J. Scheurmann and S. Yokura, Characteristic classes of Hilbert schemes of points via symmetric products, Geometry & Topology 17 (2013) 1165-1198. (査読有)

T. Ikeda and H. Naruse, K-theoretic analogues of factorial Schur P- and Q-functions, Adv. Math., vol. 243 (2013), 22-66. (査読有)

M. Abate, F. Bracci, T. Suwa and F. Tovena, Localization of Atiyah classes, Rev. Mat. Iberoam. 29 (2013), 547-578, DOI:10.4171/RMI/730 (査読有)

T. Ohmoto, A note on Chern - Schwartz - MacPherson class, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, European Math. Soc., Vol. 20 (2012), 117-132. (査読有)

[学会発表](計12件)

T. Ohmoto, Classical enumerative geometry and Thom polynomials, IMPANGA 15, ベドレボ(ポーランド), 2015年4月16日

H. Naruse, Equivariant quantum cohomology of maximal isotropic Grassmannians, International "Workshop Integrable Systems and Representation Theory", 東京海洋大学(東京都港区), 2015年3月10日

S. Yokura, Characteristic classes of singular varieties, Workshop "Local and Global Invariants of Singularities", マルセイユ(フランス), 2015年2月26日

S. Yokura, Fiberwise bordism groups and their bivariant analogues, Analysis and Topology in Interaction 2014, コルトナ(イタリア), 2014年6月17日

T. Suwa, Riemann-Roch via localization, Seminario di Analisi Complessa, ローマ(イタリア), 2013年9月10日

T. Ohmoto, Singularities and Characteristic Classes for Differentiable Maps, The 12th International Workshop on Real and Complex Singularities, サンカルロス(ブラジル), 2012年7月24-26日

[図書](計1件)

V. Blanloeil and T. Ohmoto (ed.), Singularities in Geometry and Topology - Strasbourg 2009, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, European Math. Soc., Vol. 20 (2012), 320 pp., ISBN 978-3-03719-118-7

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大本 亨 (OHMOTO, Toru)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 20264400

(2) 研究分担者

成瀬 弘 (NARUSE, Hiroshi)
山梨大学・総合研究部・教授
研究者番号: 20172596

諏訪 立雄 (SUWA, Tatsuo)
北海道大学・・・名誉教授
研究者番号: 40109418

與倉 昭治 (YOKURA, Shoji)
鹿児島大学・
学術研究院理工学域理学系・教授
研究者番号: 60182680