

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2017

課題番号：24340008

研究課題名(和文) スカラー曲率とアインシュタイン計量の幾何解析・大域幾何

研究課題名(英文) Geometric and Global Analysis of Scalar Curvature and Einstein Metrics

研究代表者

芥川 一雄 (AKUTAGAWA, KAZUO)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：80192920

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,700,000円

研究成果の概要(和文)：非常に一般的な特異集合を許容する多様体上で、スカラー曲率に関する山辺の問題において Aubin の不等式の一般化を確立し、それが strict な不等式の場合特異山辺計量の存在定理を得た。

さらに等号が成立するときに、解が存在しないような例を構成した。またエッジコーン・アインシュタイン計量と呼ばれる特異アインシュタイン計量に対して、リッチ曲率をコントロールした滑らかな計量族による近似を示した。応用として、エッジコーン・アインシュタイン計量の存在を利用して、滑らかな多様体の山辺不変量の下からの評価法を与えた。

研究成果の概要(英文)：On a compact manifold with very general singularities, we have studied the Yamabe problem and have established a generalization of Aubin's inequality for Yamabe constants. When the inequality is strict, we have proved the existence of singular Yamabe metrics.

When the equality of the inequality holds, we have constructed an example of singular manifolds which have not singular Yamabe metrics. For an edge-cone Einstein metric on a smooth manifold, we have constructed an appropriate family of smooth metrics with Ricci curvature bounded below by the Einstein constant. As a corollary, we have obtained an estimate of the Yamabe invariant from below by using the existence of edge-cone Einstein metrics.

研究分野：微分幾何学

キーワード：微分幾何 幾何解析 スカラー曲率 アインシュタイン計量 山辺不変量

1. 研究開始当初の背景

与えられたコンパクトな可微分多様体 M に対し、「 M を最もよく反映するリーマン計量は存在するか?」という、幾何において最も基本的な問題の一つを、微分幾何・トポロジー、および幾何解析の立場から研究することおよび応用として M の幾何・トポロジーを研究することは重要かつ興味深いことである。

そのための第 1 ステップとして、共形多様体 (M, C) 上の山辺の問題が考えられ、その解である山辺計量の存在問題は肯定的に解決された。この問題に付随する共形不変量 $Y(M, C)$ は山辺定数と呼ばれる。その第 2 ステップとして、 M 上の共形類全体を動かして山辺定数の上限を取ることで M の山辺不変量 $Y(M)$ が定義される。「 $Y(M) > 0 \Leftrightarrow M$ は正スカラー曲率計量を許容する」という結果は、この不変量の幾何的意味をよく表しているが、 $Y(M)$ の持つ情報はその符号だけではなく、その値にも意味があり、適切に曲率が反映されたきわめて興味深い微分位相不変量といえる。

山辺不変量に関する基本問題は次の 2 つである。

- (1) $Y(M, [g]) = Y(M)$ となる (一般に特異点を許容する) アインシュタイン計量 g は存在するか。(このような g は、supreme アインシュタイン計量と呼ばれる。)
- (2) 山辺不変量 $Y(M)$ の値を、上/下から評価し、その値を計算すること。

問題(2)に関しては、特に 3・4 次元多様体の場合に大きく進展した。4 次元の場合は、主に LeBrun の Seiberg-Witten 理論の応用による研究により大きな進展を見た。3 次元の場合の山辺不変量は、その値がゼロ以下の場合には、Perelman のリッチフローの研究により不変量の値の決定問題は完全に解決した。その値が正の場合には、相対論・宇宙論に現れる Penrose 不等式および逆平均曲率流の手法を応用して、3 次元実射影空間を含むいくつかの計算結果が得られた。いずれにしてもそこで用いられている手法は表面上全く異なっており、それらの一般的取り扱いや普遍的理解は、未解決の状態である。問題(1)に関しては、Anderson, 研究代表者の芥川および研究協力者の Carron による基本的結果はあるものの、殆ど手つかずの状態である。

2. 研究の目的

本件研究の目的は、山辺計量族の極限を与える(一般には特異点を許容する)極限空間の山辺の問題・山辺定数の研究、および元の多様体の山辺不変量や supreme アインシュタイン計量との関係を研究することである。具体的には、下記の通りである。

(1) なるべく一般的な特異空間上で山辺の問題の可解性を研究する。より詳しくは、stratified spaces 上に edge 計量を導入した simple edge spaces や iterated edge spaces 上で山辺の問題を考える。その際、山辺定数に関する Aubin の不等式の一般化が不可欠となる。滑らかな多様体の場合と同様に、一般化された Aubin の不等式が strict な場合と等式が成立する場合に分けて、研究を行う。

(2) 特異山辺計量の研究の応用として、山辺不変量の評価の研究や supreme アインシュタイン計量の研究を行う。「特異アインシュタイン計量はいつ特異山辺計量となるか?」、 「特異アインシュタイン計量を用いて滑らかな多様体の山辺不変量の評価は可能か?」等を問題にする。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者の芥川は各連携研究者および海外の研究協力者と、本研究課題および各専門分野との関連するテーマについて定期的に研究連絡を行う。

(2) 国内外の微分幾何・トポロジー・幾何解析等の研究集会に出席し、本研究に関連する分野の研究者と討論を行う。

(3) 毎年、国際研究集会「Geometric Analysis in Geometry and Topology」を開催し、国内外の研究者による、本研究に関連する話題の連続講演を行っていただく。これにより、専門知識の習得、および講演者滞り期間中に研究連絡を行う。

4. 研究成果

(1) コンパクトな測度距離空間 (X, g) で、その内の稠密な開集合上に滑らかなリーマン多様体の構造の入る殆どリーマン的測度距離空間と呼ばれるものを考える。この空間に関して、山辺定数 $Y(X, [g])$ および局所山辺定数 $Y_L(X, [g])$ なる概念が定義され、Aubin の不等式が次のように一般化されることを示した：

$$Y(X, [g]) \leq Y_L(X, [g]) \cdots (*)$$

不等式(*)が strict であるとき、山辺の問題は可解であることを示した。等号成立の場合には、一般に可解でないことは既に知られていたことに注意する。また (X, g) が iterated edge space であるときは、その局所山辺定数は具体的に記述でき、解として得られた特異山辺計量も再び iterated edge 計量となることも示した。

(2) iterated edge space (X, g) 上の山辺の

問題の解の正則性に関して, (X, g) の弱い幾何的条件設定の下で解の Hölder 連続性を示した.

(3) 測度距離空間をさらに一般化した Dirichlet 空間上で山辺の問題や Aubin の不等式が定式化されることを示し, その一般化された Aubin の不等式が strict のとき, 山辺の問題の解が存在することが示した. この結果は, 例えば CR 山辺の問題などへの応用を持つ.

(4) g をコンパクトな可微分多様体 M 上の edge-cone アインシュタイン計量とすると, 滑らかな計量族でそれらの Ricci 曲率の下極限が g のアインシュタイン定数と一致するものを構成した. 応用として, M の山辺不変量 $Y(M)$ は特異計量 g の体積 $\text{Vol}(g)$ とスカラー曲率 $R(g)$ を用いて,

$$Y(M) \geq R(g) \cdot \text{Vol}(g)^{2/n}$$

と評価される. これは特異計量を用いた山辺不変量の評価法の最初の結果である.

(5) 山辺定数の有限被覆に関する Aubin の補題を, 分岐被覆の場合に拡張した. それを用いて, Aubin の不等式で等号成立の場合で山辺の問題に解が存在しない特異空間の例を構成した. この様な例はコンパクトなオービフォールドの場合に, 既に Viaclovsky によって構成されていた. 2 つの証明方法は全く異なっており, また特異集合はそれぞれ余次元 2 の部分多様体および 1 点であり, 非常に対照的である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

3. 6. 以外すべて査読有

1. K. Akutagawa, The Yamabe invariant, to appear in Amer. Math. Soc. Transl., Sugaku Expositions (2020)
2. K. Akutagawa, G. Carron, R. Mazzeo, The Yamabe problem on Dirichlet spaces, to appear in Tsinghua Lectures in Mathematics, Higher Education Press in China and International Press (2017), arXiv:1306.4373
3. K. Akutagawa, Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Report No. 36 (2017), 43–46, DOI: 10.4171/OWR/2017/36 査読なし

4. K. Akutagawa, R. Aiyama, Minimal Legendrian surfaces in the five-dimensional Heisenberg group, Geometry and Topology of Manifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 154 (2016), 1–13, DOI:10.1007/978-4-431-56021-0
5. K. Akutagawa, R. Aiyama, S. Imagawa, Y. Kawakami, Remarks on the Gauss images of complete minimal surfaces in Euclidean four-space, Annali di Matematica Pura ed Applicata 196 (2017), 1863–1875, DOI 10.1007/s10231-017-0643-6
6. 芥川和雄, Edge-cone Einstein 計量と山辺不変量, 第 63 回幾何学シンポジウム予稿集 63 (2016), 101–113, 査読なし
7. K. Akutagawa, Y. Matsumoto, Proper harmonic maps between asymptotically hyperbolic manifolds, Mathematische Annalen, vol. 364 (2016), 793–811, DOI 10.1007/s00208-015-1229-5
8. K. Akutagawa, G. Carron, R. Mazzeo, Hölder regularity of solutions for Schrödinger operators on stratified spaces, Journal of Functional Analysis, vol. 269 (2015), 815–840, <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.02.003>
9. K. Akutagawa, G. Carron and R. Mazzeo, The Yamabe problem on stratified spaces, Geometric and Functional Analysis, vol. 24 (2014), 1039–1079, <https://doi.org/10.1007/s00039-014-0298-z>
10. 芥川和雄, 山辺不変量, 数学・論説 (日本数学会), 66巻(2014), 31–60, <http://mathsoc.jp/publication/sugaku/index66.pdf>
11. K. Akutagawa, Aubin’s Lemma for the Yamabe constants of infinite coverings and a positive mass theorem, Math. Ann., vol. 352 (2012), 829–864, DOI: 10.1007/s00208-011-0667-y
12. K. Akutagawa, Computations of the orbifold Yamabe invariant, Math. Zeit., vol. 271 (2012), 611–625, DOI 10.1007/s00209-011-0880-0,
13. R. Aiyama, K. Akutagawa, 3-manifolds with positive flat conformal structure, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 140 (2012),

3587-3592,
DOI: 10.1090/S0002-9939-2012-11423-6

[学会発表] (計 28 件・すべて招待講演)

1. K. Akutagawa, A gap theorem for positive Einstein metrics on the four-sphere, Geometry Seminar (Stanford University), 2018
2. 芥川和雄, Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant, 大阪大学理学部・談話会, 2017
3. 芥川和雄, A gap theorems for positive Einstein metrics on the 4-sphere, 大阪大学理学部・幾何セミナー, 2017
4. K. Akutagawa, Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant, 日本数学会—台湾数学会 ジョイントミーティング, Geometry Session, 2017
5. K. Akutagawa, A gap theorem for positive Einstein metrics on the four-sphere, “Special Session :Differential Geometry” of the Third Congress of the Pacific Rim Mathematical Association Oaxaca, 2017
6. K. Akutagawa, Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant, Analysis, Geometry and Topology of Positive Scalar Curvature Metrics at MFO, 2017
7. 芥川和雄, Gap theorems for positive Einstein metrics on four-manifolds, 東工大幾何セミナー, 2017
8. 芥川和雄, A gap theorem for positive Einstein metrics on the four-sphere, 福岡大学微分幾何セミナー, 2017
9. K. Akutagawa, Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant, 第 2 回日中幾何学研究集会, 2016
10. 芥川和雄, Edge-cone Einstein 計量と山辺不変量, 第 63 回幾何学シンポジウム, 2016
11. K. Akutagawa, Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant, Seminar on Geometry and Topology at University of Luxembourg, 2016
12. 芥川和雄, 山辺の問題とその発展: 特異空間上の山辺不変量とリッチフローとの関係, 岩手大学・基礎自然科学系・学術セミナー, 2016
13. 芥川和雄, Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant, 内藤博夫先生退官記念研究集会, 2016
14. 芥川和雄, Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant, 東工大幾何セミナー, 2016
15. 芥川和雄, Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant, 京都大学数学教室・談話会, 2015
16. 芥川和雄, 山辺不変量と singular Einstein 計量—小林プログラムについて—, 首都大学東京・秋葉原微分幾何セミナー, 2015
17. 芥川和雄, The Yamabe invariant and singular Einstein metrics, 研究集会「リーマン幾何と幾何解析」(筑波大学), 2015
18. 芥川和雄, The Yamabe invariant and singular Einstein metrics, 東北大学・幾何解析セミナー, 2015
19. 芥川和雄, The Yamabe problem on Dirichlet spaces, 研究集会「確率論と幾何学」(東京工業大学), 2014
20. K. Akutagawa, The Yamabe problem on edge-cone manifolds and Aubin’s inequality, Geometry Seminar at Stanford University, 2014
21. K. Akutagawa, The Yamabe problem on edge-cone manifolds and Aubin’s inequality, Geometric Invariance and Nonlinear Partial Differential Equations at ANU, 2014
22. 芥川和雄, 特異空間上の山辺の問題, Aubin の不等式, edge-cone Einstein 計量, 福岡大学微分幾何セミナー, 2013
23. K. Akutagawa, The Yamabe problem on singular spaces and Dirichlet spaces, The 8th Pacific Rim Complex Geometry Conference, 2013
24. 芥川和雄, 特異空間および Dirichlet 空間上の山辺の問題, 東京工業大学・大岡山談話会, 2013
25. K. Akutagawa, The Yamabe problem on singular spaces, The Asian

Mathematical Conference 2013 at BEXCO,
Busan, 2013

26. K. Akutagawa, The Yamabe problem on stratified spaces, Geometric Analysis Workshop, Tsinghua-Sanya Mathematical Forum, 2013
27. K. Akutagawa, The Yamabe problem on manifolds with conic singularities, Geometric PDEs (Conformal and Kähler Geometry) at Institut Henri Poincare, 2012
28. K. Akutagawa, The Yamabe problem on manifolds with conic singularities, 第8回日中友好幾何学研究集会, 2012

[図書] (計2件)

1. 芥川和雄, 小林 治, 「山辺の問題と山辺不変量」, to appear in 幾何解析, 幾何学百科第4巻 (2018), 朝倉書店, 85 ページ
2. 小林治, 芥川和雄, 井関裕靖, 「山辺の問題」, 日本数学会 (2013), 75 ページ

[その他]

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/kazuoaakutagawa/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

芥川 一雄 (AKUTAGAWA, Kazuo)
東京工業大学・理学院・教授
研究者番号: 80192920

(2) 研究分担者: なし

(3) 連携研究者

二木 昭人 (FUTAKI, Akito)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号: 90143247

小林 治 (KOBAYASHI, Osamu)
大阪市立大学・数学研究所・特別研究員
研究者番号: 10153595

古田 幹雄 (FURUTA, Mikio)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号: 50181459

納谷 信 (NAYATANI, Shin)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 70222180

小野 肇 (ONO, Hajime)

埼玉大学・理工学部・准教授
研究者番号: 70467033

本多 正平 (HONDA, Shouhei)
東北大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 60574738

松尾 信一郎 (MATSUO, Shinichiroh)
名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 40599487

松本 佳彦 (MATSUMOTO, Yoshihiko)
大阪大学・理学研究科・助教
研究者番号: 00710625
(平成26年4月より)

(4) 研究協力者

ジル カロン (Gilles Carron)
Professor
Département de Mathématiques
Université de Nantes (France)

レイフ マツツエオ (Rafe Mazzeo)
Professor
Department of Mathematics
Stanford University (USA)

イラーリア モンデロ (Ilaria Mondello)
Researcher
Département de Mathématiques
Université de Nantes (France)
(2015-2016)

ボリス ベルトマン (Boris Vertman)
Professor
Mathematisches Institut
Universität Münster (Deutschland)
(2017)

以上