

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24340010

研究課題名(和文)無限次元リー代数によるリーマン面の位相幾何学的研究

研究課題名(英文)Topological study of Riemann surfaces through infinite-dimensional Lie algebras

研究代表者

河澄 響矢(Kawazumi, Nariya)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：30214646

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,500,000円

研究成果の概要(和文)：正則ホモトピー版のゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数において可縮ループを残す定式化を与えた。ゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数と榎本・佐藤トレースと柏原・ヴェルニユ問題の三者の間に密接な関連があることが初めて明らかになった。

空でない境界をもつ連結コンパクト曲面について、完備ゴールドマン・リー代数のテンソル表示が得られた。系として「無限小デー・ニールセン定理」がえられ、境界が連結とは限らない場合のジョンソン準同型の幾何的定式化がえられた。

ホモロジカル・ゴールドマン・リー代数が、有限生成であり、さらに、生成元の個数の最小数が $2g+2$ であることが示された。

研究成果の概要(英文)：We introduced a new regular homotopy version of the Goldman-Turaev Lie bialgebra, where null-homotopic loops are reserved. This lead us a new close relationship among the Goldman-Turaev Lie bialgebra, the Enomoto-Satoh trace and the Kashiwara-Vergne problem. (Kawazumi)

We gave a tensorial description of the completed Goldman Lie algebra of a compact connected surface with non-empty boundary. As corollaries, we obtained "the infinitesimal Dehn-Nielsen theorem" and a geometric formulation of the Johnson homomorphisms in the case where the boundary is not connected. (Kawazumi-Kuno)

We showed that the homological Goldman Lie algebra is finitely generated, and that the smallest number of its generating system is $2g+2$. (Kawazumi-Kuno-Toda)

研究分野：位相幾何学

キーワード：リーマン面 ゴールドマン・リー代数 写像類群 正則ホモトピー トゥラエフ余括弧積 榎本佐藤トレース 発散コサイクル 無限次元リー代数

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究開始前に、代表者と連携研究者久野によって、境界が連結な曲面のジョンソン準同型が、ゴールドマン・リー代数の枠組みで幾何的に定式化できることが分かっていた。これにより、ジョンソン準同型の問題は、ゴールドマン・リー代数の問題として理解することが可能となっていた。さらに、開始直前に、代表者と連携研究者久野によって、(ジョンソン準同型の外側にある) 森田トレースがトゥラエフ余括弧積から導かれることが分かっていた。しかし、森田トレースよりも深く本質的な榎本佐藤トレースがトゥラエフ余括弧積から導かれるかどうかは不明であった。(のちに榎本によって、通常のトゥラエフ余括弧積の最低次項から導くことは不可能であることが示された。)

(2) 本研究開始前に、代表者と連携研究者久野によって、境界が連結な曲面のゴールドマン・リー代数のテンソル表示が得られていた。これを境界が連結とは限らない曲面に拡張すること、および、ジョンソン準同型とも関連して、トゥラエフ余括弧積の(最低次にかぎらないすべての次数での) テンソル表示を与えることが課題であった。他方、これらと独立に、ジョンソン準同型を複数の境界成分をもつ曲面で定式化することは重要な問題であった。

(3) リーマン面の文脈で現れるさまざまな無限次元リー代数の代数構造の解明は重要な課題であったし、現在でもありつづけている。標語的に言えば「写像類群の『リー代数』を解明する」ということである。

2. 研究の目的

(1) トゥラエフ余括弧積の完全なテンソル表示を得ること。とくに、榎本佐藤トレースが現れるかどうかを判定すること。

(2) 境界が連結とは限らない場合にも、ゴールドマン・リー代数のテンソル表示を得ること。これらの場合にも、ジョンソン準同型を幾何的に定式化すること。

(3) リーマン面の文脈で現れるさまざまな無限次元リー代数の代数構造を解明すること。

3. 研究の方法

(1) トゥラエフ余括弧積の特異ホモロジー的解釈を、代数に翻訳しようとした。しかし、榎本による否定的な結果もあり、のちに、古田幹雄による曲面の大域枠を使ったアール類の解釈に思い至り、正則ホモトピーに着目するようになった。

(2) ホモロジー代数を使って、望む結果を得ることが出来た。

(3) 幾つかの考察を進めた。なお、シンプレクティック導分のリー代数の代数構造について、概説論文を書くことはできたが大きな結果がえられなかったのは残念である。

なお、それぞれリー代数のコホモロジーおよびストリング・トポロジーを専門とする特任研究員2名を雇用した。

4. 研究成果

(1) 代表者は、正則ホモトピーを考慮することでゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数の精密化を行った。ここでは、トゥラエフの定式化とは異なり、可縮なループも残すことにする。この精密化の完備化にも同様にトレリ群が埋め込まれる。その上で精密化したトゥラエフ余括弧積を見ると境界が連結な場合榎本佐藤トレースが、種数 0 の場合アレクシーヴ・トロシアン発散コサイクルが得られる。境界が連結な場合のアール類になる第一項の部分の我々の解釈は、古田幹雄による曲面の大域枠を使ったアール類の解釈に他ならない。これによりゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数と榎本・佐藤トレースと柏原・ヴェルニュ問題の三者の間に密接な関連があることが初めて明らかになった。

(2) 代表者によって、種数 0 境界成分数 3 曲面についてスタンダード指數的展開によるトゥラエフ余括弧積のテンソル表示が得られた。

代表者および連携研究者久野によって、空でない境界をもつ向きづけられた連結コンパクト曲面について、完備ゴールドマン・リー代数のテンソル表示が得られた。系として「無限小デー・ニールセン定理」が肯定的に証明された。G. マッシュヨーおよび V. トゥラエフも筋理論によって同様の表示を得ている。

の応用として、代表者および連携研究者久野によって、プットマンの意味での最大トレリ群の完備ゴールドマン・リー代数への埋め込みが得られた。境界の連結成分が複数ある場合の、ジョンソン準同型が幾何的に定式化できた。

(3) 代表者によって、空でない境界をもつ向きづけられた連結コンパクト曲面について、その完備ゴールドマン・リー代数の中心が境界ループの幕で位相的に生成されることが示された。

代表者、連携研究者久野および代表者の大学院生(当時)の戸田和樹によって、ホモロジカル・ゴールドマン・リー代数が、有限生成であること、さらに、生成元の個数の最小数が $2g+2$ であることが示された。

なお、本科研費が主催または共催した研究集会は以下の通り(合計9件)。

「リーマン面に関連する位相幾何学」

期日: 2012年9月1日(土)-4日(火)

場所: 東京大学大学院数理科学研究科

世話人(敬称略): 久野雄介(津田塾大), 田所勇樹(木更津高専), 佐藤正寿(岐阜大)。

Workshop: Johnson homomorphisms

期日: 2013年6月3日(月)-7日(金)

場所: 東京大学大学院数理科学研究科

世話人(敬称略): 中村博昭(岡山大), 逆井卓也(東大数理), 河澄響矢(東大数理)。

研究集会「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」

期日: 2013年6月7日(金)-9日(日)

場所: 龍谷大学セミナーハウスともいき荘

世話人: 足助太郎(東大数理)

「リーマン面に関連する位相幾何学」

期日: 2013年8月26日(月)-29日(木)

場所: 東京大学大学院数理科学研究科

世話人(敬称略): 久野雄介(津田塾大), 佐藤正寿(岐阜大), 田所勇樹(木更津高専), 河澄響矢(東大数理)。

「2013年度ホモトピー論シンポジウム」

期日: 2013年11月2日(土)-4日(月)

場所: 岡山大学

世話人(敬称略): 井上雅照(岡山理科大学), 中井洋史(東京都市大学), 中川征樹(岡山大学), 山口俊博(高知大学)。

第61回 Encounter with Mathematics 「代数曲面とその位相的不変量をめぐって -代数曲面の地誌学-」

期日: 2014年6月20日(金)-21日(土)

場所: 中央大学理工学部数学教室

「リーマン面に関連する位相幾何学」

期日: 2014年8月25日(月)-28日(木)

場所: 東京大学大学院数理科学研究科

世話人(敬称略): 田所勇樹(木更津高専), 佐藤正寿(岐阜大), 久野雄介(津田塾大), 河澄響矢(東大数理)。

第62回 Encounter with Mathematics 「波動方程式 --古典物理から相対論まで--」

期日: 2014年9月15日(祝)-16日(火)

場所: 中央大学理工学部数学教室

第63回 Encounter with Mathematics 「最適輸送理論とリッチ曲率 --物を運ぶと曲率がわかる--」

期日: 2015年2月20日(金)-21日(土)

場所: 中央大学理工学部数学教室

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計21件)

Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, 査読無, 'Handbook of Teichmüller theory', edited by A. Papadopoulos, Volume V, EMS Publishing House, Zurich, 2015, pp. 98-165, http://www.ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=200&srch=series|irma

Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, Intersections of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, 査読有, Ann. Inst. Fourier **65** (2015) 2711-2762, http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2015__65_6_2711_0

Yuuki Tadokoro, The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2=z^{2g+1}-1$, 査読有, Tsukuba J. Math. **38**(2015), 137-158, doi: 10.21099/tkbjm/1429103717

Nariya Kawazumi, A regular homotopy version of the Goldman-Turaev Lie bialgebra, the Enomoto-Satoh traces and the divergence cocycle in the Kashiwara-Vergne problem, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録, 1936 (2015), 137-141, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1936-16.pdf>

Naoya Enomoto and Takao Satoh, New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, 査読有, Algebraic and Geometric Topology **14** (2014), no. 2, 627-669. DOI: 10.2140/agt.2014.14.627

Nariya Kawazumi, Surface topology and involutive bimodules, 査読有, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B48** (2014) 1--23. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>

Masatoshi Sato, On stable commutator length in the mapping class groups of pointed spheres, 査読有, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B48** (2014) 43--56.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyu/bu/bessatsu-j.html>

Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno and Kazuki Toda, Generators of the homological Goldman Lie algebra, 査読有, Osaka J. Math. **51** (2014) 665--671.
<https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1414090797>

Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, The logarithms of Dehn twists, 査読有, Quantum Topology, **5** (2014) 347--423.
DOI 10.4171/QT/54

Danny Calegari, Naoyuki Monden and Masatoshi Sato, On stable commutator length in hyperelliptic mapping class groups, 査読有, Pacific Journal of Mathematics **272** (2014), No. 2, 323--351, doi:10.2140/pjm.2014.272.323.

Susumu Hirose and Masatoshi Sato, A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, 査読有, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **157** (2014), No. 2, 345--355, doi:10.1017/S0305004114000358.

Kenta Hayano and Masatoshi Sato, A signature formula for hyperelliptic broken Lefschetz fibrations, 査読有, Topology and its Applications **173** (2014), 157-174, doi:10.1016/j.topol.2014.05.022

Yusuke Kuno, Robert Penner and Vladimir Turaev, Marked fatgraph complexes and surface automorphisms, 査読有, Geometriae Dedicata **167**, 151-166 (2013)
DOI: 10.1007/s10711-012-9807-0

Masatoshi Sato, A local signature for fibered 4-manifolds with a finite group action, 査読有, Tohoku Math. J. (2) **65** (2013), 545--568,
doi:10.2748/tmj/1386354295

Kenta Hayano and Masatoshi Sato, Four-manifolds admitting hyperelliptic broken Lefschetz fibrations, 査読有, Michigan Mathematical Journal **62** (2013), 323--351, doi:10.1307/mmj/1370870375

Takao Satoh, First cohomologies and the Johnson homomorphisms of the automorphism group of a free group, 査読有, Journal of Pure and Applied Algebra, **217** (2013), 137-152.
doi:10.1016/j.jpaa.2012.06.017

Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, The center of the Goldman Lie algebra of a surface of infinite genus, 査読有, Quarterly J. Math., **64** (2013) 1167--1190.
doi: 10.1093/qmath/has017

Yusuke Kuno, The generalized Dehn twist along a figure eight, 査読有, Journal of Topology and Analysis **5**, 271-295 (2013)
DOI: 10.1142/S1793525313500155

Tomohiko Ishida and Nariya Kawazumi, The Lie algebra of rooted planar trees, 査読有, Hokkaido Math. J., **42** (2013) 397--416. <https://projecteuclid.org/euclid.hokmj/1384273389>

Takao Satoh, On the augmentation quotients of the IA-automorphism group of a free group, 査読有, Algebraic and Geometric Topology, **12** (2012) 1239-1263.
DOI: 10.2140/agt.2012.12.1239

²¹ Takao Satoh, On the lower central series of the IA-automorphism group of a free group, 査読有, Journal of Pure and Applied Algebra, **216** (2012), 709-717,
doi:10.1016/j.jpaa.2011.08.006

[学会発表](計 53 件)

Nariya Kawazumi, Algebraic aspects of the Goldman-Turaev Lie bialgebra, 2015 年 8 月 21 日, workshop "GRT, MZVs and associators", Hôtel Les Sources, Les Diablerets. (スイス)

Yusuke Kuno, Symplectic expansions and mapping class groups, 2015 年 8 月 21 日, "GRT, MZVs and associators", Hôtel Les Sources, Les Diablerets. (スイス)

Yusuke Kuno, A homology valued invariant for trivalent fatgraph spines, 2015 年 6 月 4 日, French-Japanese workshop on Teichmüller spaces and surface mapping class groups, IRMA, University of Strasbourg (フランス)

Nariya Kawazumi, A tensorial description of the Turaev cobracket on genus 0 compact surfaces, 2015 年 6 月 4 日, French-Japanese workshop on Teichmüller spaces and surface mapping class groups, IRMA, University of Strasbourg (フランス)

久野 雄介, Fatgraph complexes and mapping class groups, 2015 年 3 月 23 日, 日本数学会トポロジー分科会特別講演, 明治大学駿河台キャンパス.

Nariya Kawazumi, A flat connection on the Teichmüller space and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, 2015 年 3 月 16 日, OIST Mini symposium: Moduli Space, Conformal Field Theory and Matrix Models, 沖縄科学技術大学院大学.

Yuuki Tadokoro, The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2=z^{2g+1}-1$, 2015 年 3 月 16 日, OIST Mini symposium: Moduli Space, Conformal Field Theory and Matrix Models, 沖縄科学技術大学院大学.

田所勇樹, The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2=z^{2g+1}-1$, 2015 年 2 月 14 日, 研究集会「リーマン面・不連続群論」, 大阪大学中之島センター,

佐藤正寿, 種数 2 のハンドル体写像類群のコホモロジー環について, 2015 年 1 月 22 日, トポロジー金曜セミナー, 九州大学.

河澄響矢, Goldman-Turaev Lie 双代数のテンソル表示について, 2014 年 11 月 20 日, 東工大複素解析セミナー, 東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻.

Nariya Kawazumi, The Turaev cobracket, the Enomoto-Satoh traces and the divergence cocycle in the Kashiwara-Vergne problem, 2014 年 9 月 10 日, Special day 「Mapping class groups of surfaces and automorphism groups of free groups」, IRMA, University of Strasbourg, (フランス)

Yusuke Kuno, Morita-Penner construction and the Earle class, 2014 年 9 月 10 日, Special day 「Mapping class groups of surfaces and automorphism groups of free groups」, IRMA, University of Strasbourg, (フランス)

田所勇樹, The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2=z^{2g+1}-1$, 2013 年 8 月 22 日, 研究集会「代数多様体のトポロジーとその周辺」, 北海道大学大学院理学研究院.

Takao Satoh, Some problems on the Johnson homomorphisms and related topics, 2014 年 8 月 7 日, Workshop on Algebraic Topology and Its Applications, 大連理工大学 (中国).

Takao Satoh, On the Johnson homomorphisms of automorphism groups of free groups, 2014 年 8 月 6 日, Workshop on Algebraic Topology and Its Applications, 大連理工大学 (中国).

佐藤正寿, レベルつき写像類群のアーベル化, 2014 年 7 月 11 日, 幾何学コロキウム, 北海道大学.

河澄響矢, 曲面上の曲線たちのつくる代数系について, 2014 年 6 月 8 日, 「無限群と幾何学の新展開のアウトリーチについての研究会」東京大学玉原国際セミナーハウス.

河澄響矢, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the mapping class group, 2014 年 2 月 20 日, 研究集会「第 9 回代数・解析・幾何学セミナー」, 鹿児島大学理学部.

Takao Satoh, The Johnson-Morita theory for the rings of Frick characters of free groups, 2014 年 2 月 14 日, 研究集会「New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups」, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (ドイツ)

Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, 2014 年 2 月 13 日, 研究集会「New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups」, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (ドイツ)

²¹ Nariya Kawazumi, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the mapping class group, 2014 年 1 月 24 日, 研究集会「離散群と双曲空間の複素解析とトポロジー」京都大学数理解析研究所.

²² Masatoshi Sato, A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, 2014 年 1 月 22 日, 研究集会「離散群と双曲空間の複素解析とトポロジー」京都大学数理解析研究所.

²³ Takao Satoh, On the rings of $SL(2, \mathbb{C})$ -characters of free groups, 2013 年 12 月 2 日, 研究集会「East Asian Conference on Algebraic Topology 5」, 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 (中国).

²⁴ Nariya Kawazumi, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the mapping class group, 2013 年 9 月 18 日, Caltech Geometry and Topology Seminar, California 工科大学, Los Angeles. (米国)

²⁵ Takao Satoh, On the rings of $SL(2, \mathbb{C})$ -characters of free groups, 2013 年 9 月 13 日, 研究集会「Geometry of Manifolds and Group Action」, Adam Mickiewicz Univ., Slubice, (ポーランド)

26 佐藤正寿, 超楕円の特異レフシェッツ束の構造をもつ4次元多様体について, 2013年5月27日, 幾何セミナー, 東北大学.

27 Nariya Kawazumi, An infinitesimal version of the Dehn-Nielsen theorem, 2013年4月17日, 研究集会「Teichmüller theory: quantization and relations with physics」, Schrodinger Institute, Wien. (オーストリア)

28 久野雄介, Earle 類の Ptolemy 亜群への拡張について (Robert Penner 氏, Vladimir Turaev 氏と共同), 2013年3月21日, 日本数学会トポロジー分科会一般講演, 京都大学.

29 Nariya Kawazumi, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the largest Torelli group, 2013年2月5日, 研究集会「Advances in Teichmüller Theory」, Schrodinger Institute, Wien. (オーストリア)

30 Masatoshi Sato, On stable commutator length in the mapping class groups of punctured spheres, 2012年11月6日, CNRS/JSPS joint seminar 「Aspects of representation theory in low-dimensional topology and 3-dimensional invariants」, Carry-le-Rouet. (フランス)

31 Nariya Kawazumi, The completed Goldman-Turaev Lie bialgebra and mapping class groups, 2012年11月6日, CNRS/JSPS joint seminar 「Aspects of representation theory in low-dimensional topology and 3-dimensional invariants」, Carry-le-Rouet. (フランス)

32 久野雄介, Dehn ツイストの一般化について I, II, 2012年9月10日, 11日, 研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」, 京都大学数理解析研究所.

33 Masatoshi Sato, On stable commutator length in the mapping class groups of punctured spheres, 2012年7月21日, 研究集会「The Conference on Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis (GAAGTA)」, Kunming University of Science and Technology, 昆明. (中国)

34 Takao Satoh, On the Johnson cokernels of the mapping class group of a surface, 2012年7月26日, 研究集会「The Conference on Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis (GAAGTA)」, Kunming University of Science and Technology, 昆明. (中国)

35 Yuuki Tadokoro, Nontrivial algebraic cycles in the Jacobian varieties of some quotients of Fermat curves, 2012年7月28日, 研究集会「The Conference on Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis (GAAGTA)」, Kunming University of Science and Technology, 昆明. (中国)

36 Nariya Kawazumi, Mapping class groups and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, 2012年7月26日, 研究集会「The Conference on Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis (GAAGTA)」, Kunming University of Science and Technology, 昆明. (中国)

37 Nariya Kawazumi, Johnson-Morita theory and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, I, II, III, 2012年6月25-27日, 研究集会「Mapping class groups and quantum topology」, IRMA, University of Strasbourg. (フランス)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/keyboard.html>

(後続する科研費基盤Bと共通)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河澄 響矢 (KAWAZUMI Nariya)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 30214646

(3) 連携研究者

田所 勇樹 (TADOKORO Yuuki)

木更津工業高等専門学校・准教授
研究者番号: 10435414

佐藤 隆夫 (SATO Takao)

東京理科大学・理学部第二部・准教授
研究者番号: 70533256

佐藤 正寿 (SATO Masatoshi)

東京電機大学・未来科学部・准教授
研究者番号: 10632010

久野 雄介 (KUNO Yusuke)

津田塾大学・学芸学部・准教授
研究者番号: 80632760