

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24340011

研究課題名(和文) ゲージ理論と局所化

研究課題名(英文) Gauge theory and localization

研究代表者

古田 幹雄 (Furuta, Mikio)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：50181459

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,600,000円

研究成果の概要(和文)：4次元多様体上のゲージ理論は物理学に由来する。物理学の理論では通常は、事象が生じる確率などの数がアウトプットとして最終的な目標である。数学的な扱いにおいて、数よりも複雑だが豊富な内容をもつ情報を扱う手段が開発されている。本研究は後者の数学的なアプローチをとる。目標は、その情報を用いて逆に4次元多様体の形状の性質を解明することであった。主な結果として、4次元多様体をその内部の3次元多様体によって切断するとき、その切断面の性質(Floer K群)と、4次元多様体を特徴づけるひとつの数(符号数)とが関連することが示された。

研究成果の概要(英文)：We investigated gauge theory on 4-manifolds using mathematical approach. While final outputs in physics are usually supposed to be some numbers, such as probabilities, it is known that we can construct some richer structures as outputs in the mathematical approach to gauge theory. Our goal is to find new properties of 4-manifolds using such rich structures. A major result of our research is a relation between the "signature" of a 4-manifold and the structure of the 3-manifold (Floer K group) which appears as its boundary.

研究分野：幾何学

キーワード：トポロジー 4次元多様体 ゲージ理論

1. 研究開始当初の背景

(1)ゲージ理論は数学的にはトポロジカルな場の理論として整備されてきた。4次元の閉多様体に対する不変量は数に値をとり、3次元の閉多様体に対する不変量はFloerホモロジー群と呼ばれるいずれも代数的対象である。これらを精密化し、幾何学的対象を対応させる理論がSeiberg-Witten理論において構築されつつある。Donaldson理論、Heegaard-Floer理論においてはFloerホモロジーの安定ホモトピー的精密化であるFloerホモトピー型は構成されていない。一方SW理論においてはManolescuが $b_1=0$ の3次元多様体に対してFloerホモトピー型を構成している。

(2)Seiberg-Witten理論の微分幾何的な応用としてLeBrunによる山辺不変量へのアプローチが知られている。方程式の解の存在を用いた議論であるが、必ずしもその意味がわかりやすいものではなく、いかなる一般化が可能であるかの考察は難しかった。

(3)準備的な研究として、次の3個があった。Seiberg-Witten理論を用いて4次元スピン多様体の不変量の同定が古田と亀谷との共同研究として考察されていた。得られたひとつの結果は、当該の不変量が、対称性をもつある種のK群の不変量との関係を持つことであった。

Tian-Jun Liとの共同研究により4次元理論の不変量ではDonaldson理論においても不変量の幾何学化が特別な場合に可能であることが見出されていた。

吉田尚彦・藤田玄の両氏との共同研究により、線形理論における局所化のひとつ現象が抽出され、量子力学における準古典近似が精密である場合の数学的メカニズムのひとつが提出されていた。

2. 研究の目的

(1)トポロジカル場の理論としてのゲージ理論を、Seiberg-Witten理論およびそのDonaldson理論において、Floerホモトピー型の理論の整備を通じて行うことが目標であった。Donaldson理論において出発点は背景(3)が想定された。また、非線形理論であるゲージ理論を理解する準備として線形理論における局所化現象(背景の(3))が出発点になると想定された。

(2)ただし、研究の進展に伴い、当初未想定であった状況に直面する可能性は常に考慮された。実際そのような状況(研究の方法(2)参照)となり、研究の目的として、新たに我々の知見を、それらの状況に適用することも含む形に立て直された。

3. 研究の方法

(1)研究の目的の(1)に関してはTian-Jun Li氏との共同研究(背景(3))を進めた。共同研究のため、ミネソタ大学を数回訪問した。さらに、研究の目的の(1)については笹平裕史氏、T.Khandhawit氏の協力を得て、新しい方法を考察した。

(2)ゲージ理論は元来起源が物理学に由来する分野であるため、物理学と関連した研究上の相互作用が潜在的にあり得る。実際、我々の知見(背景(3))と関連した議論が物性物理学のトポロジカル絶縁体の不変量において出現していることが本研究の進行中に知られた。これについては、小谷元子(AMRI)、佐藤浩司(AMRI)、松尾信一郎(名古屋大)、林晋(東大)、窪田陽介(東大)の諸氏と議論を行った。それにより、物理現象の数学的理解と同時に、数学へのフィードバックを試みた。

4. 研究成果

(1) Seiberg-Witten Floer K コホモロジー：研究の目的の(1)に対して、Tian-Jun Li氏との共同研究により、3次元スピン有理ホモロジー3球面に対して、Pin(2)同変Seiberg-Witten Floerホモトピー型およびSeiberg-Witten Floer Pin(2)同変Kコホモロジーを定式化した。さらにその応用として境界のある4次元コンパクトスピン多様体に対して、10/8タイプの不等式を得た。

(2) Seiberg-Witten 方程式の摂動：研究の背景の(2)に関して、松尾信一郎氏(名古屋大学)との共同研究により、解析的側面に関する共同研究を行い、LeBrunの不等式の別証明と拡張を得た。Seiberg-Witten理論の基盤となる、モジュライ空間のコンパクト性の根拠において、Weitzenböck公式の役割を根拠から再考することにより、Seiberg-Witten方程式の形を大幅に変形しても同じ不変量が得られるという考察に基づく。微分幾何的な不等式を得るために適切な方程式の形を手で作ることが可能になり、既存のLeBrunによる議論の著しい簡易化と、一般化がなされた。

(3)バルクエッジ対応：研究の方法(2)で言及したように、Seiberg-Witten不変量の考察のために亀谷・古田の共同研究で用いられた不変量が、トポロジカル絶縁体の理論に現れるとの知見を得て、これと関連した考察を行った。小谷元子、佐藤浩司、松尾信一郎、林晋、窪田陽介の諸氏との共同研究として、バルクエッジ対応の数学的なひとつの理解を得た。

(4) Bott 周期性：研究の方法(2)で言及した

新たな方向への考察の、数学へのフィードバックとして、Bott 周期性定理の新しい証明を得た。同定理の証明の数多くあるが、Bott 要素を掛ける操作の逆を指数写像によって構成するタイプの証明と、準ファイバー束の構成によってホモトピー完全系列を示すタイプの証明との間の相互の関係が、この証明によって明示的に見て取ることができる。

(5) Seiberg-Witten Floer ホモトピー型：研究の方法(1)で言及したように笹平裕史氏(名古屋大学)、T. Khandhawit 氏(カブリIPMU)との共同研究により、Floer ホモトピー型を、偏曲に関するトポロジカルな障害が消滅する条件のもとで構成するための研究を行った。現在までの基本的な結果はスペクトル切断を用いた Hilbert 束の有限次元近似の存在定理である。

上記(1)(2)は具体的な成果であり、(3)(4)は新しい可能性の開拓である。しかし、最後の(5)は研究が開始されたところであり、十分な成果は得られていない。また、当初の背景(3)に述べた Donaldson 理論に関する考察は、抽象的議論にとどまっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

— M. Furuta and S. Matsuo, “The perturbation of the Seiberg-Witten equations revisited”, by Journal of the Mathematical Society of Japan, in press, 13 pages, 査読有

— Fujita, Hajime; Furuta, Mikio; Yoshida, Takahiko Torus fibrations and localization of index III: equivariant version and its applications. Comm. Math. Phys. 327 (2014), no. 3, 665–689 査読有

— Fujita, Hajime; Furuta, Mikio; Yoshida, Takahiko Torus fibrations and localization of index II: local index for acyclic compatible system. Comm. Math. Phys. 326 (2014), no. 3, 585–633. 査読有

— Furuta, Mikio; Kametani, Yukio Equivariant version of Rochlin-type congruences. J. Math. Soc. Japan 66 (2014), no. 1, 205–221. 査読有

[学会発表](計15件)

古田幹雄 “Topological Invariants and Partial Differential Equations”, The AIMR International Symposium 2016, 東北大学 AIMR, 2016年2月 招待講演

古田幹雄 “Seiberg-Witten 不変量と有限次元近似”, 第11回代数・解析・幾何学セミナー, 鹿児島大学, 2016年2月 招待講演

M. Furuta, “An introduction to Seiberg-Witten equations” Berkeley-Tokyo Winter School “Geometry, Topology and Representation Theory”, UC Berkeley, February 2016 (米) 招待講演

M. Furuta “Yang-Mills theory / Seiberg-Witten theory” 2015 SNU 4-Manifolds Workshop, Oak Valley, December 2015 (韓国) 招待講演

古田幹雄 “トポロジカル不変量と偏微分方程式”, 第1回トポロジーが紡ぐ物質科学のフロンティア 領域研究会, 京都大学 2015年12月 招待講演

M. Furuta “10/8-type inequalities and TQFT”, IGA/AMSI Workshop “Australia-Japan Geometry, Analysis and their Applications”, Adelaide University, October 2015 (豪) 招待講演

M. Furuta, “Bott periodicity and the bulk-edge correspondence”, International Workshop : Mathematical Approach to Topological Phases in Spintronics, 東北大学 October 2015 招待講演

M. Furuta “10/8-type inequalities and TQFT” Trends in Modern Geometry & the 10th Pacific Rim Complex Geometry Conference, 東京大学, 2015年7月 招待講演

M. Furuta “The perturbation of the Seiberg-Witten equations revisited”, Workshop on Topology and Invariants of 4-Manifolds: August, 2014 SCGP, (米) 招待講演

M. Furuta “ゲージ理論のいくつかの側面”, 第61回トポロジーシンポジウム 東北大学片平キャンパス, 2014年7月 招待講演

Furuta, Mikio, Dirac operators on spin 4-manifolds and mod 2 index, Topological Phases in Spintronics, AIMR 東北大学, February, 2014 招待講演

Furuta, Mikio, A TQFT for spin 4-manifolds associated with Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer K-group, the Fourth TsinghuaSanya,

International Mathematics Forum, December,
2013 (中国) 招待講演

Furuta, Mikio, Two variants of the
10/8 inequality, Workshop and Conference
on the Topology and Invariants of Smooth
4-Manifolds, University of Minnesota,
July to August, 2013 (米) 招待講演

Furuta, Mikio, Seiberg-Witten Floer K
cohomology and a 10/8-type inequality
for spin 4-manifolds with boundaries,
Geometry and topology of smooth
4-manifolds, Max Planck Institute for
Mathematics, Bonn, June, 2013 (独) 招待
講演

Furuta, Mikio, An introductions to
gauge theories, 2013 SNU-KIAS Topology
Winter School, Muju, December, 2012, (韓
国) 招待講演

6 . 研究組織

(1)研究代表者

古田 幹雄 (FURUTA, Mikio)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号 : 50181459