

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 22 日現在

機関番号：37111

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24340013

研究課題名(和文)幾何学と固有値理論に関する最先端的な研究

研究課題名(英文)The latest frontier study on geometry and theory of eigenvalues

研究代表者

成 慶明 (Cheng, Qing-Ming)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：50274577

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では独創的な研究方法でCheng-Yangの漸化式を利用して、完備リーマン多様体内の有界領域におけるラプラス作用素の固有値に関する最適な下限を得た。これにより、Chavelの固有値の下限に関する難問を解決した。さらに、ユークリッド空間への極小的等長はめ込みの障害をラプラス作用素の固有値により発見した。特異点を許すフロントの幾何学に関する研究を行い、フロントに関するGauss-Bonnet定理を研究した。最大値原理を拡張し、平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーの分類研究で研究成果を上げた。Alexandrov空間上のラプラス作用素の固有値に関する研究を推進した。

研究成果の概要(英文)：By making use of Cheng-Yang recursion formula, we give optimal estimates for lower bounds of eigenvalues of Laplacian on a bounded domain in complete Riemannian manifolds. Our method is original. According to this result, a difficult problem proposed by I. Chavel is solved. Furthermore, we find an obstruction on minimal immersions from complete Riemannian manifolds into Euclidean spaces in the view of eigenvalues of Laplacian. Geometry of fronts with singularities has been studied. Gauss-Bonnet theorem on fronts is proved. By improving the generalized maximum principle of Omori-Yau, important results on classification of complete self-shrinkers of the mean curvature flow are obtained. Eigenvalues of Laplacian on compact Alexandrov spaces are studied and important progresses are obtained.

研究分野：微分幾何学

キーワード：eigenvalues of Laplacian Riemannian manifold minimal immersion Alexandrov space Singularity maximum principle mean curvature flow self-shrinker

1. 研究開始当初の背景

(1) リーマン多様体におけるラプラス作用素及び2重調和作用素の固有値理論は部分多様体の幾何学とリーマン幾何学とも結びついていて、長い歴史をもち、幾何学分野で重要な研究課題である。固有値理論の研究を通して、リーマン多様体の幾何学構造といった大きな枠組みの研究を目指している。当該代表者は Yang 氏とともに完備リーマン多様体上のラプラス作用素の固有値の下限に関する研究に大きな成果をあげており、更なる発展が期待される。さらに、ラプラス作用素の固有値の最良の上限を得て、独創性ある研究を含んでいる。(2) 特異点を許す部分多様体の幾何学に関する研究はより広い対象を扱う視点が新しく、研究分担者山田は梅原らとともに曲面や超曲面をフロントととらえて、目覚ましい研究成果をあげた。高次元非等方的な超曲面の幾何学に関する研究について、連携研究者小磯は B. Palmer とともに超曲面の安定性を研究し、非等方的平均曲率が一定のコンパクト超曲面に関する Hopf 型の定理を示した。Nash 定理を通して、部分多様体の幾何学に関する研究を用いて、当該代表者は Chen との共同研究で \mathbb{R}^n 内の完備極小部分多様体内の有界領域におけるラプラス作用素の固有値に関する最適な普遍不等式を得た。(3) Alexandrov 空間はリーマン多様体列の極限として特異点をもつ。Alexandrov 空間の幾何学の研究はポアンカレ予想の証明にも重要な貢献を寄与した。研究分担者塩谷、山口孝男らはこの研究に大きな成果をあげた。さらに、Alexandrov 空間上の解析に関する研究について、塩谷、桑江、町頭らは Alexandrov 空間上のラプラス作用素を導入し、最大値原理及びラプラスシアンの比較定理に関する研究を行った。Alexandrov 空間上にリッチ曲率が下から有界の概念を導入され、ラプラス作用素の固

有値も研究されている。特に、第1固有値に関する小嶋の球面定理を Alexandrov 空間版に拡張された。平均曲率フローに関する研究は Euclid 空間内の部分多様体の微分幾何学に関する研究において、極めて重要である。Huisken は、コンパクト凸超曲面を初期値超曲面とする平均曲率フローが一点に縮まるまでに、滑らかな性質と凸の性質を保つことを示した。レスケーリングにより、このフローは球面に収束する。さらに、平均曲率フローの特異点に関する研究は近年大変注目されている。平均曲率フローは Euclid 空間内の埋め込みコンパクト超曲面を縮小し、最終的に発展超曲面が消滅となる。故に、このような特異点は不可避である。Huisken, Colding-Minicozzi は、平均曲率フローのセルフ-シュリンカーの研究を通して、平均曲率フローの一般的な特異点に関する研究を行った。セルフ-シュリンカーは平均曲率フローの特異点での全て可能なブロー-アップを表すため、平均曲率フローに関する研究に重要な役割を果たしている。Colding-Minicozzi は平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカー(超曲面の場合)を詳細に研究し、非負平均曲率及び多項式型の面積増大度をもつような完備セルフ-シュリンカー(超曲面の場合)を分類した。

2. 研究の目的

本研究は有機的に関係している3つの目標を掲げて、新しい研究を目指す。(1) リーマン多様体におけるラプラス作用素及び2重調和作用素の固有値理論に関する研究を行う。この研究を利用し、リーマン多様体の曲率構造を究明する。特にユークリッド空間への極小的等長はめ込みの障害研究を固有値の視点から取り組む。(2) 伝統的な部分多様体の幾何学理論を現代的視点からとらえなおし、特異点を許すことにより、豊富な幾何学が生まれ、特異点を許すフロ

ントの幾何学に関する研究を追求する。部分多様体の研究を利用し、ラプラス作用素及び2重調和作用素の固有値の評価研究を行う。(3) Alexandrov 空間の幾何学及びこの空間におけるラプラス作用素の固有値を研究する。

3. 研究の方法

本研究課題において、(1)ラプラス作用素の固有値理論を研究する解析的手法を踏まえて、固有値の普遍不等式及びCheng-Yangの漸化式を用いて、固有値の上限と下限を評価する新しい研究方法を提案した。(2)完備リーマン多様体上のラプラス作用素のOmori-Yauの広義最大値原理の証明方法を用いて、平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーにおいて L -作用素の広義最大値原理を証明した。それを用いて、平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーの分類を研究した。さらに、積分公式を巧く利用して、平均曲率フローの多項式面積増大度をもつ完備セルフ-シュリンカーの分類に関する研究を推進した。(3)フロントの幾何学を研究する特異点論の手法及び幾何学的手法を融合し、特異点を許すフロントの幾何学に関する研究を行った。(4)比較定理の研究手法及び変分法などをとらえなおして、Alexandrov空間の幾何学を研究する新しい研究方法を提案した。

4. 研究成果

(1)リーマン多様体内の有界領域における微分作用素(ラプラス作用素, 多調和作用素等)の固有値問題について, その固有値の評価研究は固有値理論の研究で最重要な研究課題である。Fourier 変換を巧く利用して, Li-Yau はユークリッド空間内の有界領域におけるラプラス作用素の第 k 番目の固有値 の下限を研究し, 最適な下限を得た。完備リーマン多様体に対して, Fourier 変換のような道具が存在しないので, Li-Yau の方法とは全く異なる新たな

分析道具が必要である。研究代表者と研究協力者とは共同で独創的, 斬新的な研究方法でCheng-Yangの漸化式を利用して, 完備リーマン多様体内の有界領域におけるラプラス作用素の固有値に関する最適な下限を得た。これにより, Chavelの固有値の下限に関する難問(I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian geometry, p. 330)を解決した。張り詰められた状態でのプレートの振動の臨界状態を表す2調和作用素の固有値問題の固有値に関する研究について, Cheng-Yangは独創的且つ新しい研究方法で試験関数を構成し, 1955年にPayne-Polya-Weinbergerにより提案された固有値に関する普遍不等式の難問を解決した。本研究ではこの研究課題をさらに追究し, その固有値に関する最適な普遍不等式の研究に対して, 大きな進展を与えた。張り詰められた状態でのプレートの振動を表す2調和作用素のディリクレ固有値問題の固有値に関する研究について, 固有値に関する最適な上限の評価を研究し, 漸近的な意味で, 2調和作用素のディリクレ固有値問題の固有値に関する最適な上限の評価を得た。さらに, 2調和作用素のディリクレ固有値問題の固有値の下限に関する研究も行い, 研究協力者Wei氏等と共同で顕著な研究成果を得た。多調和作用素のディリクレ固有値問題の固有値の下限に関する研究について, 重要な進展も与えた。さらに, ユークリッド空間への極小的等長はめ込みの障害研究を固有値の視点から取り組んで, リーマン多様体のユークリッド空間への極小的等長はめ込みが存在するならば, このリーマン多様体の任意の有界領域におけるラプラス作用素のディリクレ固有値問題の固有値の振る舞いはユークリッド空間内の有界領域におけるラプラス作用素のディリクレ固有値問題の固有値と似ているような振る舞いをもつことを特徴付けした。従って,

ユークリッド空間への極小的等長はめ込みの障害をラプラス作用素の固有値の視点から発見した. 共形リーマン多様体の幾何学に関する研究において, Q -曲率と Paneitz 作用素が重要な役割を果たしている. 研究代表者は Paneitz 作用素の固有値に関する評価を追究し, 4次元コンパクト多様体に対して, 最適な評価を与えた.

(2)山田らは特異点を許すフロントの幾何学に関する研究を行い, フロントに関する Gauss-Bonnet 定理を研究した. 3次元 de Sitter 空間の, 特異点を許す定平均曲率 1 の曲面に関連し, リーマン面上のある種の特異点をもつ双曲計量概念を定式化し, 基本的な性質を調べた. さらに, 球面から 2 点を除いたリーマン面やトーラス上の PS-free な extended hyperbolic metric を分類した. これに対応して de Sitter 空間の平均曲率一定 2-noid の分類を行った. 3次元 ユークリッド空間の曲面の交差帽子 cross-cap の微分幾何学を調べ, それに関係する不変量が“内的”であることを示した. また, あるクラスの交差帽子の等長変形を構成し, それによりいくつかの不変量が内的ではないことを示した. 氏らは 3次元ユークリッド空間や一般の 3次元リーマン多様体内の曲面に現れるジェネリックな特異点である交叉帽子の微分幾何学的不変量の可算無限個の系列を考察し, そのうちいくつかは内的, いくつかは外的であることを示した. さらに, 4次元ユークリッド空間の共形平坦超曲面に対して「双対」が存在することを示し, 共形平坦超曲面がたくさん存在することを示した.

完備リーマン多様体上のラプラス作用素に関する Omori-Yau の広義最大値原理を, 平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカー上の L -作用素に拡張し, それを用いて平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーの分類研究で研究成果を上げ, 多項式面積

増大度に関する条件を仮定せず, 平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーの剛体性定理を示した. 単位球面内の極小超曲面の研究手法と平均曲率フローのセルフ-シュリンカーの研究手法を融合し, 多項式面積増大度をもつ完備セルフ-シュリンカーの第 2 基本形式の長さを研究した. 我々は完備セルフ-シュリンカーの第 2 基本形式の長さが一定で, それに関する第 2 ギャップが存在することを示した.

Colding-Minicozzi の論文で仮定した多項式面積増大度をもつ条件を徹底的に調べ, この条件は本質的な条件であることが分かった. さらに, L -作用素の広義最大値原理を用いて, 3次元 Euclid 空間内の第 2 基本形式の長さが一定で平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーを完全に分類した. 重み付き体積保存平均曲率フローの λ -超曲面の研究について, 良い性質を持つ関数に L -作用素を適用することにより, 多項式面積増大度をもつ完備 λ -超曲面の分類定理を与えた. さらに, ラプラス作用素の Omori-Yau の広義最大値原理を, 重み付き体積保存平均曲率フローの λ -超曲面上の L -作用素に拡張し, 多項式面積増大度を仮定しない完備 λ -超曲面のギャップ定理を証明した. 重み付き体積保存平均曲率フローの λ -超曲面の構成問題を取り込んで, 典型的でない λ -超曲面の例が殆どに知られてないため, 興味深い λ -超曲面の例を具体的に構成することが極めて重要である. 本研究ではこのような研究を行い, 大きな進展を与えた.

(3)塩谷はコンパクトな Alexandrov 空間上のラプラス作用素の固有値に関する研究を推進し, 測度集中を基礎としてグロモフが打ち立てた理論の解明を行なった. 測度距離空間の全体の空間のコンパクト化として, ピラミッドの空間があるが, その上に自然な距離関数を導入して研究した. 応用として, 半径が次

元の平方根であるような球面の次元が無限大へ発散したときの極限が無限次元のガウス空間であることを証明した。グロモフは測度の集中現象のアイデアを基に、測度距離空間の間に「オブザーバブル距離」を定義し、それに関する幾何学的理論を創始した。オブザーバブル距離に関する空間列の収束は「集中」と呼ばれている。集中は従来よく研究されてきた測度付きグロモフ・ハウスドルフ収束よりも弱いものである。曲率次元条件 $CD(K, \infty)$ とは、リッチ曲率がある定数 K 以上であるという条件を測度距離空間へと拡張した概念である。本研究において、 $CD(K, \infty)$ をみたとすような測度距離空間の列が測度距離空間へ集中するとき、その極限空間も $CD(K, \infty)$ をみたとすことを証明した。その応用として、非負リッチ曲率をもつ閉リーマン多様体の正の第 k 固有値と第1固有値の比が k のみに従属するある定数以下であることが得られた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 12 件)

1. Qing-Ming Cheng, Universal estimate for eigenvalues and applications, Proceedings of the 6th International Congress of Chinese Mathematicians, ALM 37, pp. 37–52, 2015, Higher Education Press and International Press, Beijing–Boston. (査読有)
2. Qing-Ming Cheng and G. Wei, A gap theorem of self-shrinkers, Trans. Amer. Math. Soc., 367(2015), 4895–4915. Doi S 0002–9947(2015)06161–3 (査読有)
3. Qing-Ming Cheng and Y. Peng, Complete self-shrinkers of the mean curvature flow, Calculus of Variations and PDEs., DOI 10.1007/s00526–014–0720–2, 52(2015), 497–506. (査読有)
4. Qing-Ming Cheng, Estimates for eigenvalues of the Paneitz operator, J. Diff. Eqns., 257(2014), 3868–3886. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2014.07.012>. (査読有)
5. Qing-Ming Cheng and G. Wei, Upper and lower bounds for eigenvalues of the clamped plate problem, J. Diff. Eqns., 255(2013), 220–233. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2013.04.004> (査読有)
6. Qing-Ming Cheng, X. Qi and G. Wei, A lower bound for eigenvalues of the poly-Laplacian with arbitrary order, Pacific J. Math., 262(2013), 35–47. dx.doi.org/10.2140/pjm.2013.262.35. (査読有)
7. Qing-Ming Cheng and X. Qi, Eigenvalues of the Laplacian on Riemannian manifolds, International J. Math., 23(2012), 1250067–1–1250067–20. DOI:10.1142/S0129167X1250067X (査読有)
8. Qing-Ming Cheng and H. Yang, Universal bounds for eigenvalues of a buckling problem II, Trans. Amer. Math. Soc., 364(2012), 6139–6158. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2012-05662-5>. (査読有)
9. T. Shioya, Limit formulas for metric measure invariants and phase transition property, Math. Z., 280 (2015), 759–782. DOI:10.1007/s00209–015–1447–2. (査読有)
10. K. Funano and T. Shioya, Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian, Geom. Funct. Anal., 23(2013) 888–936. DOI:10.1007/s00039–013–0215–x. (査読有)
11. M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, Intrinsic invariants of cross caps, Selecta Math., 20 (2014), 769–785. doi:10.1007/s00029–013–0134–6. (査読有)

12. K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts, J. Geom. Anal., 22 (2012), no. 2, 383-409. doi: 10.1007/s12220-010-9193-5. (査読有)
(総計 36 件)

[学会発表] (計 8 件)

1. 成 慶明, Geometry of λ -hypersurfaces of the weighted volume-preserving mean curvature flow, 日本数学会年会企画特別講演, 日本数学会年会, 2016 年 3 月 16 日-19 日, 筑波大学, つくば市.
2. Qing-Ming Cheng, Geometry of critical points of weighted area functional, School & Workshop on Geometric Analysis, December 7-11, 2015, KIAS, Korea.
3. Qing-Ming Cheng, Geometry of λ -hyper surfaces, International conference on geometry and topology of submanifolds, September 25-28, 2015, Henan Normal University, Henan, China.
4. Qing-Ming Cheng, Critical points of the weighted area functional, The 10th Geometry Conference for the Friendship between China and Japan, September 6-12, 2014, Fudan University, Shanghai, China
5. Qing-Ming Cheng, Complete self-shrinkers of the mean curvature flow, The Eleventh Pacific Rim Geometry Conference, December 10-14, 2013, Fudan University, Shanghai, China.
6. Qing-Ming Cheng, Universal estimates for eigenvalues and applications, ICCM 2013 The Sixth International Congress of Chinese Mathematicians, July 14-19, 2013, National Taiwan University, Taipei, Taiwan.
7. T. Shioya, Convergence of metric measure spaces, Workshop on Analysis and Geometry

in Metric Spaces, June 1-5, 2015, Madrid, Spain.

8. K. Yamada, Analytic extensions of spacelike maximal surfaces in Minkowski 3-space to timelike surfaces, Geometric Analysis in Geometry and Topology 2015, 2015年11月10日, 東京理科大学, 東京
(総計 52 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.cis.fukuoka-u.ac.jp/~cheng/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

成 慶明 (Cheng Qing-Ming)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号 : 50274577

(2) 研究分担者

塩谷 隆 (Shioya Takashi)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号 : 90235507

山田 光太郎 (Yamada Kotaro)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号 : 10221657

(3) 連携研究者

二木 昭人 (Futaki Akito)

東京大学・数理科学研究科・教授

研究者番号 : 90143247

小磯 深幸 (Koiso Miyuki)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号 : 10178189

Rossmann Wayne

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号 : 50284485

(4) 研究協力者

Li Haizhong (清華大学・教授)

Wei Guoxin (華南師範大学・教授)

Yang Hongcang (中国科学院・教授)