

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 22 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24340016

研究課題名(和文) 流体方程式における自発的流れパターン形成 解の特異性と大規模流動現象

研究課題名(英文) Spontaneous flow pattern formation in fluids --- singularity and large scale flow phenomena

研究代表者

山田 道夫 (Yamada, Michio)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：90166736

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,800,000円

研究成果の概要(和文)：線形波動を伴う流体系として、面上および回転球面上の二次元非圧縮流体系を対象として、ジェット流形成過程の詳細について理論的および数値的に調べた。このようなジェット流は木星などの惑星系でも見られるがその生成機構は未だ明確ではない。ここではジェット流への運動量輸送に着目し、波動入射に伴うジェット流形成過程について、弱非線形段階の記述を元に擬運動量の評価による加速量の定量的記述を目指し、ジェット流の線形安定性問題における連続モードの漸近表示を用いてジェット加速量を与える理論的表式を得た。またこの表式を、完全な非線形相互作用を含む数値計算を実行することによって、よい一致を確認した。

研究成果の概要(英文)：Jet formation process on a beta plane and a rotating sphere was studied theoretically and numerically for incompressible two-dimensional fluids. The jet formation is observed in several situations including Jovian atmosphere, but its dynamical mechanism is not yet well understood. In this study, we have obtained an analytical description for the amount of jet acceleration on the beta plane by the use of the pseudo momentum given by the weakly nonlinear theory of Rossby waves, employing asymptotic forms of the eigenfunctions of the continuous modes in the linear stability problem of the jet flow. We also performed a numerical simulation of the fluid equation, and obtained a good agreement between the theoretical prediction and the numerically observed values for the jet acceleration.

研究分野：応用数学・流体力学

キーワード：回転流体 ジェット流 ロスピー波

1. 研究開始当初の背景

(1) 流体力学は、地球科学や惑星科学など大規模な系における流動現象を理論的数値的に記述するための最も重要な手段の一つである。しかしこのような系の支配方程式については、しばしば解の基本的性質すら明らかでなく、大規模計算機によるシミュレーション研究で得られた結果についても、コードの差異によるものか、方程式本来の性質を反映しているものかを判断することが容易でないことがあり、結果の解釈において曖昧な状況に陥ることも稀ではない。申請者はこれまで、地球惑星科学に関連する流体系について、基本的かつ理想的な系を設定し、それを支配する流体方程式の解の構造の理論的数値的な研究を行ってきた。従来申請者が取り上げてきた流体系は、地球惑星中心核を念頭においた回転球殻内ブシネスク対流系や地球惑星表面の大気・海洋を念頭においた微分回転を含む2次元非発散流体系である。

(2) 本研究で取り上げるジェット形成は、後者の系の特に乱流中における重要な秩序形成現象である。このようなジェット形成現象は、流れ場の著しいかつ重要な特徴を与えることから、前世紀後半に特に地球科学において注目された。多くの観測や数値実験の解析から、この現象はしばしば「波と平均流の相互作用」と呼ばれる枠組みで解釈される。これは、流れ場に線形波動が存在するとき線形波動の非線形相互作用によってジェット流（平均流）が生成されるとするもので、擬運動量の振舞いによってジェット流の消長を記述する。しかしこの枠組みの欠点は擬運動量の時間変化を具体的に計算する有効な手段を欠いていることであり、そのため、観測結果や数値実験結果のデータに対し後付けの議論は可能であっても予測は困難なまま残されている。

2. 研究の目的

(1) 本研究では地球惑星規模の大規模流動現象において普遍的にみられる強いジェット流の形成について、ジェット流の消長の定量的記述を目的とする。ジェット流形成は、遠方からの波動入射によって運動量が運ばれ、その運動量が臨界層を通じてジェット流に移されることによって起こる現象であると考えられる。このときジェット流に移される運動量の定量的な見積もりが本研究の目的の一つである。

(2) このためにまず、平均流の周りの線形摂動方程式の（連続固有値の）固有解の遠方の漸近形に注目する。漸近形は波動の線形結合となるため、それぞれの波動の係数は入射波、反射波、透過波などの振幅に対応する。従ってこれらから構成される反射係数と透過係数は波動の遠方場を特徴づけている。波束がジェット流領域に入射すると、波束はジェッ

ト流によって変形され、臨界層と通してエネルギーと運動量のやりとりを行い、同時に、ジェット流の領域を透過し反対側に抜けていく波束とジェット流領域で反射される波束に分裂する、これらの透過波束と反射波束がジェット流から遠ざかったときにもつ大きさは、透過係数と反射係数によって記述される。従って透過波と反射波が遠方で運ぶ運動量は、透過係数と反射係数によって記述できることになる。そこで流体系における運動量を十分に広い領域で積分して、積分領域の境界における解がその漸近表示で表現されるようにすると、透過係数と反射係数によって、領域境界を通しての運動量流入の総量が与えられる。運動量保存則から、これはジェット流加速の総量に等しく、その定量的評価が与えられる。以上の方法は、線形摂動方程式の固有関数のうち、遠方の波動に対応するものを用いるが、これは連続モードであり、不安定固有値ではなく安定固有値に属している。そのため従来、この固有関数は多数ある固有関数の一つではあるが、不安定性の出現には無関係のモードとして注目されることのなかったものである。しかしここでは、安定固有値に属する連続モードの遠方場の漸近形が、ジェット流加速現象の定量的記述を与えることになる。線形安定性問題の固有解が、線形安定性のみならず、弱非線形段階の波と平均流の相互作用を記述している点が特徴的であり、その枠組みの構成がこの研究の目的の一つである。

(2) 理論的な観点から興味深いのは、この連続モードは特異な固有値問題の解になっているため、特異点において集中的な運動量の発生消滅が見られ、これが散乱データに大きく反映されていることである。連続モードの特異性が、ジェット流形成という大規模で顕著な流動現象を引き起こしている点は、この問題の最も興味ある特徴と思われる。本研究では、このように導かれたジェット流形成の定量的記述を、ジェット流形成の高精度の数値実験によって検証することも目的とした。上述の理論的枠組みは、反射係数・透過係数とジェット加速量の関係を与えるが、具体的な基本場における加速量の振る舞いは数値的に求めざるを得ない。ここではあるパラメータ範囲において、実際に加速量を求める計算を行う。またこのような加速に関連する現実の惑星大気現象についても主として数値的に検討する。

3. 研究の方法

(1) ここではまず、最も典型的な流体系として、 β 面上の2次元非発散流体系を考える。この系の支配方程式は渦度方程式の形で書いたとき Charney-Hasegawa-Mima (CHM) 方程式とよばれる。CHM系についてここで念頭におくのは、従来、申請者らも含め多数の数値的研究によって確立した、乱流状態における

ジェット流の形成現象である (Yoden and Yamada 1993, Cho and Polvani 1996). この現象の特徴として, 乱流場ではあるが, 波動乱流系の特徴として弱非線形近似が良い精度で成り立つことが知られている. そこで流体場を東西方向に一樣な平均流 (東西ジェット流) とその周りの攪乱に分解し CHM 方程式を攪乱の大きさ ε で展開する. このとき攪乱の主要項 ($O(\varepsilon)$) は平均流の周りの線形摂動方程式に従う. またその次のオーダー ($O(\varepsilon^2)$) では攪乱同士の非線形相互作用による平均流への寄与が現れる. このとき平均流から遠い場所では攪乱は線形波動 (Rossby 波) に漸近するのでこの攪乱も以下では Rossby 波とよぶ. Rossby 波同士の非線形相互作用の評価が問題の中心である.

(2) この Rossby 波の非線形相互作用については, 上の線形摂動方程式からも同じ形の項が導かれ, 擬運動量の関係式が得られる. Rossby 波の平均流への寄与は擬運動量を通じて議論される (「波と平均流の相互作用」 Charney and Drazin 1961, Buhler 2009). しかしこの理論の欠点は擬運動量そのものを実際に計算するための有効な手段が与えられていないことである.

本研究では, この擬運動量の計算が攪乱の主要項の計算に帰着されることに着目する. この主要項は上記の摂動方程式に従うが, 特にその Rossby 波解は, 摂動方程式の連続固有値の固有解 (以下 Rossby モードとよぶ) に分解されることがすでに代表者らによって示されている. この結果をジェット流形成問題に用いることが本研究の方法である.

各々の Rossby モードは遠方で単色 Rossby 波に漸近することから, Rossby モードをジェット流領域への入射成分, 反射成分, 透過成分に漸近的に分けることによって, Rossby 波の散乱データ, すなわち反射係数および透過係数が定義される. これらの散乱データは線形摂動問題の固有値問題の解析によって得られる.

(3) ジェット流形成を引き起こす Rossby 波は実際の場合では波束として存在するが, 波束とジェット流の相互作用 (ジェット流による Rossby 波束の散乱) の前後における波束の変化の主要な成分は, これらの散乱データによって表現することができるので, この結果, ジェット流形成の定量的評価が可能となる. 理論の検証に用いる数値計算は, 上記の特異点の影響を十分に考慮する必要があるため, 特異点付近の解を注意深く扱うスペクトル法による高精度数値計算による. またこのような平均流形成機構と関連すると思われる惑星大気現象についても主として数値計算を用いた検討を行う.

4. 研究成果

(1) β 面上の 2 次元粘性非発散流体系 (CHM

系) について, 流体の速度場をジェット流とその上の摂動に分け, 摂動の大きさ ε で展開した. ε の 1 次では β 項を含む Orr-Sommerfeld 方程式が得られ, 2 次では摂動同士の相互作用による平均流生成 (平均運動量生成) の方程式が得られる. この平均流生成の方程式を空間変数および時間変数について十分に大きな領域で積分すると 2 次の平均流の加速量が遠方の Reynolds ストレスを時間積分したもので表される. 運動量保存則を反映して, この式においては粘性項の寄与は消滅する. したがって遠方の Reynolds ストレスの評価が得られれば 2 次の平均流加速量を得ることができる.

(2) そこで遠方場が Rossby 波の波束である場合を考える. 遠方で Rossby 波となる摂動は Orr-Sommerfeld 方程式の連続モードに対応することが, 一般の摂動の時間発展の解析を通じて代表者らによって既に示されている. この連続モードの遠方場の漸近形は入射波, 反射波, 透過波から成っており, 反射波の係数と透過波の係数はそれぞれ反射係数と透過係数として, 漸近形を特徴づけるパラメータである. そこでこの漸近形を用いることにより遠方場の Reynolds ストレスを評価することができ, 平均流の 2 次の全加速量を表す表式を得た.

(3) この表式は, 反射係数 R と透過係数 T とするとき因子 $|T|^{2+}|R|^{2-1}$ に比例する形式になっており, Rossby 波が西向き運動量を運ぶことと整合的である. 具体的な平均流の場に適用するためにはこの因子を求めることが必要である. しかしこの量の表現には連続モードの固有関数の臨界層における値が必要になるため, 解析的な評価は一般に困難で, 数値的方法に頼らざるを得ない. ここでも反射係数と透過係数の値は数値的に求めた. なお代表的な平均流の場におけるこれらの係数の漸近形は既に代表者らによって解析的に求められている.

(4) 得られた平均流加速量の表式を元の CHM 方程式の数値シミュレーションの結果を用いて比較検討した. 平均流として平行流近似した Bickley ジェットを用いた場合, 入射波束の中心波数が小さいと平均流加速は起こらない. しかしある波数よりも大きいと西向きの平均流加速が生じ, 波束の殆どは加速に使われるようになる. 加速量の理論値とシミュレーション値の比較では, Orr-Sommerfeld 方程式の固有関数計算から得られる反射係数・透過係数を用いた場合, 波数が小さい辺りでの不一致が大きくなる傾向がみられた. これは理論の前提である十分に長い波束という条件がシミュレーションでは満たされていないためと考えられる. これに対し, 波束自体の反射・透過のシミュレーションを行って得た反射係数と透過係数を用いた加速

量の理論値は、シミュレーションによる加速量と非常に良い一致を示し、ここで導いた加速量の表現式の妥当性が確認された。

(5) 本研究で対象としたのは、粘性臨界層を通じて行われる Rossby 波から平均流への運動量輸送過程であるが、粘性を次第に小さくして、いくつかのシミュレーションを行い加速量の変化を調べた。その結果は非粘性極限において有限の加速量が残ること、すなわち平均流加速に粘性による擬運動量減衰によるものとは異なる機構があり得ることを示唆していると考えられ、今後の課題である。なお、このような加速現象と関連すると思われる惑星大気についても、現実の惑星回転や輻射の多様性の影響を議論した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① S. Noda, M. Ishiwatari, K. Nakajima, Y.O. Takahashia, S.Takehiro, M. Onishi, G.L. Hashimoto, K. Kuramoto, Y.-Y.Hayashi, The circulation pattern and day-night heat transport in the atmosphere of a synchronously rotating aquaplanet: dependence on planetary rotation rate. *Icarus*. 査読有, Vol.282, 2017, DOI: 10.1016/j.icarus.2016.09.004
- ② Tatsuya Yamashita, Masatsugu Odaka, Ko-Ichiro Sugiyama, Kensuke Nakajima, Masaki Ishiwatari, Seiya Nishizawa, Yoshiyuki O. Takahashi, and Yoshi-Yuki Hayashi, A numerical study of convection in a condensing CO2 atmosphere under early Mars-like conditions, *J.Atmos.Sci.*, 査読有, vol.73, 2016, 4151-4169. DOI: 10.1175/JAS-D-15-0132.1
- ③ Masanobu Inubushi, Shin-ichi Takehiro, and Michio Yamada, Regeneration cycle and the covariant Lyapunov vectors in a minimal wall turbulence, *Physical Review E*, 査読有, vol.92, 2015, 023022-1 to -14, DOI: 10.1103/PhysRevE.92.023022
- ④ Eiichi Sasaki, Shin-ichi Takehiro and Michio Yamada, Bifurcation structure of two-dimensional viscous zonal flows on a rotating sphere, *Journal of Fluid Mechanics*, 査読有, vol.774, 2015, 224-244, DOI: 10.1017/jfm.2015.262
- ⑤ Yoshitaka Saiki, Michio Yamada, Abraham C.-L. Chian, Rodrigo A. Miranda and Erico L. Rempel, Reconstruction of chaotic saddles by classification of unstable periodic orbits: Kuramoto-Sivashinsky equation, 査読有, vol.25, 2015, 103123-7 to -7, DOI: 10.1063/1.4933267
- ⑥ S.Takehiro, Influence of surface displacement on solid state flow induced by horizontally heterogeneous Joule heating in the inner core of the Earth. *Physics of The Earth and Planetary Interiors*, 査読有, vol.241, 2015, 15-20. DOI: 10.1016/j.pepi.2015.02.003
- ⑦ S.Takehiro, Penetration of Alfvén waves into an upper stably-stratified layer excited by magnetoconvection in rotating spherical shells. *Physics of The Earth and Planetary Interiors*. 査読有, vol.241, 2015, 37-43. DOI: 10.1016/j.pepi.2015.02.005
- ⑧ K.Kimura, S.Takehiro, M.Yamada, Equatorial symmetry of Boussinesq convective solutions in a rotating spherical shell allowing rotation of the inner and outer spheres, *Physics of Fluids*, 査読有, vol.26, 2014, 084105-1 to -11. DOI: 10.1063/1.4893374
- ⑨ K.Kimura, S.Takehiro, M.Yamada, Stability and bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a moderately rotating spherical shell allowing rotation of the inner sphere, *Physics of Fluids*, 査読有, vol.25, 2013, 084107 to 15, DOI: 10.1063/1.4819140.
- ⑩ E.Sasaki, S.Takehiro, M.Yamada, Linear stability of viscous zonal jet flows on a rotating sphere, *Journal of Physical Society of Japan*, 査読有, vol.82, 2013, 094402-1 to -6. DOI: 10.7566/JPSJ.82.094402
- ⑪ Y.Sasaki, S.Takehiro, S.Nishizawa, Y.-Y.Hayashi, Effects of latitudinally heterogeneous buoyancy flux conditions at the inner boundary on MHD dynamo in a rotating spherical shell, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 査読有, vol.223, 2013, 55-61, DOI: 10.1016/j.pepi.2013.07.003
- ⑫ M.Yamada and T.Yoneda, Resonant interaction of Rossby waves in two-dimensional flow on a beta plane, *Physica D*, 査読有, vol.245, 2013, 1-7. DOI: 10.1016/j.physd.2012.11.001
- ⑬ K.Obuse, S.Takehiro and M.Yamada, Weak interaction between zonal jets on a beta-plane, *Japan J. of Industrial and Applied Mathematics*, 査読有, vol.30, 2013, 111-127. DOI: 10.1007/s13160-012-0086-9
- ⑭ E.Sasaki, S.Takehiro and M.Yamada, A note on the stability of inviscid zonal

jet flows on a rotating sphere. J.Fluid Mech., 査読有, vol.710, 2012, 154-165. DOI: 10.1017/jfm.2012.356

[学会発表] (計 34 件)

- ① K.Obuse, S.Takehiro and M.Yamada, An effect of turbulence on zonal jet flows in forced 2D and quasi-geostrophic shallow water models on a beta plane, SIAM Computational science and Engineering (SCE) 17, 2017/02/27-03/03, Atlanta (USA).
- ② K.Obuse, S.Takehiro, and M.Yamada, Effect of turbulence on zonal jet flows in barotropic model and quasi-geostrophic shallow water model, Int.Conf on Applied Mathematics and Computer Science (ICAMCS) 2017, 2017/01/27-29, Rome(Italy).
- ③ K.Obuse, S.Takehiro and M.Yamada, An effect of turbulence on a zonal jet flow on a beta-plane, The Computational Techniques and Applications Conference (CTAC) 2016, 2016/11/27-30, Melbourne (Australia).
- ④ S.Takehiro and Y.Sasaki, Penetration of mean zonal flows into an outer stable layer excited by MHD thermal convection in rotating spherical shells, The 15th symposium of Study for Earth Deep Interior (SEDI 2016), Nantes, France.
- ⑤ M.Yamada, 2D Navier-Stokes equations on a sphere, Naruto workshop on vortex dynamics, 2016/01/16, Hotel Ad Inn Naruto (徳島県鳴門市, 日本 Naruto, Japan).
- ⑥ S.Takehiro, Penetration of steady fluid motions into an outer stable layer excited by MHD thermal convection in a rotating spherical shell, Japan SEDI symposium 2015, 2015/09/25, 東京大学地震研究所 (東京都)
- ⑦ M.Yamada, Stability of one-directional flow on a rotating sphere, ICIAM 2015, 2015/08/11, Beijing (China).
- ⑧ E.Sasaki, S.Takehiro and M.Yamada, Reproduction of 2D unsteady flows on a rotating sphere, France-Japan Workshop 2015, 2015/03/04, Paris (France).
- ⑨ M.Yamada, 2D zonal flows on a rotating sphere, ICCP9, 2015/01/09, SNU, Singapore.
- ⑩ M.Inubushi, S.Takehiro and M.Yamada, Covariant Lyapunov analysis and its application to Navier-Stokes flows, ICCP9, 2015/01/09, SNU, Singapore.
- ⑪ K.Obuse, S.Takehiro and M.Yamada, Merging and disappearing processes of zonal jets in forced 2D Navier-Stokes

turbulence on a rotating sphere, ICCP9, 2015/01/09, SNU, Singapore.

- ⑫ M.Inubushi, S.Takehiro and M.Yamada, The regeneration cycle and the covariant Lyapunov vectors in a minimal wall turbulence, Dynamics Days Asia-Pacific 2014, 2014/07/22, Madras (India).
- ⑬ M.Yamada, 2D zonal flows on a rotating sphere, Fundamental Aspects of Geophysical Turbulence, 2014/03/10, 名古屋大学 (愛知県名古屋市) .
- ⑭ S.Takehiro, Influence of surface displacement on fluid motions induced by horizontally heterogeneous Joule heating in the inner core of the earth, SEDI Pre-Symposium 2013, 2013/09/28, 湘南国際村センター (神奈川県三浦郡葉山町) .

[図書] (計 1 件)

山田道夫, 萬代武史, 芦野隆一
「応用のためのウェーブレット」
日本応用数学会監修, 共立出版, 2016, 184.

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 道夫 (YAMADA, Michio)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号: 9 0 1 6 6 7 3 6

(2) 研究分担者

竹広 真一 (TAKEHIRO, Shin-ichi)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号: 3 0 2 7 4 4 2 6

(3) 研究分担者

岡本 久 (OKAMOTO, Hisashi)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号: 4 0 1 4 3 3 5 9

(4) 研究分担者

林 祥介 (HAYASHI, Yoshiyuki)
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号: 2 0 1 8 0 9 7 9