

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 10 月 25 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24340018

研究課題名(和文) 精度保証付き数値計算による無限次元逆作用素の最適評価とその応用

研究課題名(英文) Optimal estimation for inverse of infinite-dimensional operator by self-validating numerical computations and its applications

研究代表者

渡部 善隆 (Yoshitaka, Watanabe)

九州大学・情報基盤研究開発センター・准教授

研究者番号：90243972

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,900,000円

研究成果の概要(和文)：精度保証付き数値計算とは、問題に対する解の存在と誤差限界を数学的に保証する数値計算法である。本研究では、精度保証付き数値計算により、無限次元関数空間における線形作用素の可逆性の検証と、線形作用素の逆作用素を有限次元作用素で一様近似する一般理論の構築に成功した。あわせて、この理論が、逆作用素ノルムの最適評価を与えることを明らかにした。さらに、最適評価の基盤となる大規模有限次元行列に対する特異値の効率的な精度保証付き数値計算アルゴリズムを開発し、構築した理論を非線形関数方程式に対する無限次元Newton法に基づく計算機援用証明などに応用した。

研究成果の概要(英文)："Self-validating numerical computations" stands for a computer-assisted approach to prove the existence of the solutions and its guaranteed error bounds for a given problem. By using self-validating numerical computations, this research proposed a computer-assisted procedure to assure the invertibility of a linear operator which is the sum of an unbounded bijective and a bounded operator in a Hilbert space, and to compute a bound for the norm of its inverse. We also showed that our bounds are expected to converge to the exact operator norm and to provide accurate and efficient enclosure results for the solution of nonlinear problem by infinite-dimensional Newton-type methods.

研究分野：計算数学

キーワード：精度保証付き数値計算 偏微分方程式 計算機援用証明 関数解析 無限次元固有値問題 不動点定理

1. 研究開始当初の背景

計算機で実行できる実数値・複素数値の演算は有限桁の浮動小数点数による近似計算であり、その演算結果には丸め誤差と呼ばれる近似誤差が生じる。近年、浮動小数点演算における丸め誤差を含む計算結果の数学的に厳密な保証が高い精度で効率よく実現できることが明らかにされ、計算結果の信頼性(品質保証)の問題が応用解析学や計算理工学分野で広く取り上げられることとなった。さらに、計算結果の品質保証は数値計算アルゴリズムそのものにも影響を与え、様々な数理学上に現れる問題の解を計算機によって数値的に検証するという方向にまで進展しつつある。この種の数値計算法は精度保証付き数値計算法または計算機援用証明と呼ばれ、理論解析が困難な問題に対する数値的証明として、その意義が国内外において急速に高まりつつある。

2. 研究の目的

本研究では、精度保証付き数値計算により、無限次元関数空間における線形作用素の可逆性の検証と、線形作用素の逆作用素を有限次元作用素で一様近似する一般理論を構築する。また、この理論が、逆作用素ノルムの最適評価を与えることを明らかにする。あわせて、最適評価の基盤となる大規模有限次元行列に対する特異値の効率的な精度保証付き数値計算アルゴリズムを開発する。さらに、構築した理論の応用として、非線形関数方程式に対する無限次元 Newton 法に基づく計算機援用証明と、非自己共役固有値問題の解の包み込みおよび固有値除外への拡張を行ない、結実した成果を、非線形発展方程式に対する解の存在検証法の確立と数理モデルの安定性解析に展開する。

3. 研究の方法

(1) 申請者らはこれまで、2 階楕円型偏微分作用素に対する可逆性の検証条件を導き、さらに 1 次元 Orr-Sommerfeld 方程式の線形化逆作用素の有限次元作用素による一様近似にも成功していた。これら個別の方程式に対する成果・知見を取り込みながら、無限次元線形作用素の可逆性の検証と逆作用素の精度保証付きノルム評価方法を可能な限り一般的な関数空間と作用素に拡張した理論として与えることを目的とした。また、この一般理論によって得られる逆作用素ノルム評価が、有限次元作用素による一様近似となるだけでなく、従来の方法では得ることのできなかった下限の制約がない最適評価を導くことを立証も視野に入れた。具体的な適用例として、各種境界条件を持つ移流拡散方程式、反応拡散方程式、Navier-Stokes 方程式、Oberbeck-Boussinesq 方程式の定常問題に対

する線形化作用素を取り上げ、精度保証付き数値計算を行うことにより、構築した理論の有効性の確認を目指した。

(2) 従来の研究により、(1) における線形作用素の可逆性の確認と有限次元作用素による近似は、有限次元行列に対するスペクトルノルム評価すなわち特異値問題に帰着されることが確認されていた。また、特に偏微分作用素を Galerkin 近似により離散化して得られる行列の多くは大規模かつスパース構造を持ち、一般に Hermite 性・正定値性は保証されない。そこで、摂動理論と浮動小数点演算の事後誤差評価を併用することにより、可能な限り行列の構造を維持しながらスペクトルノルムの上界を精度保証付きで求める高精度・高効率アルゴリズムの開発を計画した。具体的な達成目標として、スペクトルノルムの精度保証計算を、解きたい非線形連続問題から線形化作用素を生成する手間以下で完了することに設定した。さらに、開発・実装したアルゴリズムをプログラムライブラリとしてソースコードとともに整備・公開するとともに、アルゴリズムの並列化および多倍長精度保証環境への組み込みの検討を計画した。

(3) (2)を基盤技術とする(1)の成果を、非線形関数方程式の線形化作用素に適用することにより、無限次元 Newton 法に基づく非線形方程式の解に対する精度保証付き数値計算に応用することを計画した。具体的には、これまでの手法では解の存在検証と誤差評価が必ずしも十分に達成されていない高 Reynolds 数の流体方程式、特異摂動問題、3 次元熱対流問題、自然境界条件を持つ反応拡散方程式系の各定常問題に対する計算機援用証明に取り組んだ。また、個々の方程式に対し、精度保証付き数値計算をアルゴリズムレベルおよびプログラムレベルにおいて効率化する過程で得られた知見を (1),(2)に饋還させることにより、線形作用素に対する逆作用素評価理論を堅牢化・精錬化を図った。

(4) (1),(2)の成果を、無限次元固有値問題に対する固有値・固有関数の包み込みおよび固有値除外手法に拡張することを計画した。また、固有値問題の存在・非存在証明が、自己共役問題だけでなく、固有値が一般に複素数となる非自己共役問題にも適用可能であることを、移流拡散方程式、周期境界条件を持つ反応拡散方程式などの非自己共役作用素に対する精度保証付き数値計算により立証することも目指した。あわせて、Orr-Sommerfeld 方程式に対する固有値の局所一意性付き存在証明と除外法を組み合わせることで、固有値分布の大域構造を解明するとともに、安定・不安定性を決定する中立安定曲線を包み込むことも計画した。

4. 研究成果

(1) 線形作用素に対する可逆性の検証と最適な逆作用素ノルム評価の一般化に成功し、具体的な検証例とともに成果を広く公開した。

(2) 摂動理論による大規模行列の効率的なスペクトルノルム評価を与えることに成功した。

(3) 無限次元 Newton 法に基づく非線形関数方程式の解の計算機援用存在証明理論構築のための知見を得た。

(4) 非自己共役固有値問題に対する解の存在・非存在検証のための定式化に成功した。

本研究の採択時の研究期間は平成 24 年度から平成 27 年度であった。しかしながら、研究の最大の目的であった無限次元作用素の一樣近似理論の確立に大きな進展があったことから、研究体制を再構築して申請した基盤研究(B)が平成27年度から31年度の期間で『関数方程式に対する精度保証付き数値計算法の展開』(課題番号: 15H03637)として採択された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

*2012~2014 年度の成果を記載

[雑誌論文](計 8 件)

渡部 善隆: 微分方程式の精度保証付き数値計算 - 逐次反復に基づく計算機援用証明 -, 講究録別冊 B30 (研究集会「可積分数理の進化」, 広田 良吾, 高橋大輔 編), pp. 145-155, April, 2012.

Shuting Cai and Yoshitaka Watanabe:

A Computer-assisted Method for Excluding Eigenvalues of an Elliptic Operator Linearized at a Solution of a Nonlinear Problem, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 32, No. 1 (March 2015) pp. 263-294.

DOI 10.1007/s13160-015-0167-7

Mitsuhiro T. Nakao, Yoshitaka Watanabe, Takehiko Kinoshita, Takuma Kimura, and

Nobito Yamamoto: Some Considerations of the Invertibility Verifications for Linear Elliptic Operators, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 32, No. 1 (March 2015) pp. 19-32.

DOI 10.1007/s13160-014-0160-6

Yoshitaka Watanabe, Kaori Nagatou,

Michael Plum, and Mitsuhiro T. Nakao:

Verified Computations of Eigenvalue Exclosures for Eigenvalue Problems in Hilbert Spaces, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 52, No. 2 (May 2014) pp. 975-992.

<http://dx.doi.org/10.1137/120894683>

Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, and Mitsuhiro T. Nakao: An Improvement of the Theorem of A Posteriori Estimates for Inverse Elliptic Operators, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Vol. 5, No. 1 (January 2014) pp. 47-52.

Yoshitaka Watanabe, Takehiko Kinoshita, and Mitsuhiro T. Nakao: A Posteriori Estimates of Inverse Operators for Boundary Value Problems in Linear Elliptic Partial Differential Equations, Mathematics of Computation, Vol. 82, No. 283 (July 2013) pp. 1543-1557.

Yoshitaka Watanabe: A Simple Numerical Verification Method for Differential Equations Based on Infinite Dimensional Sequential Iteration, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Vol. 4, No. 1 (January 2013) pp. 23-33.

Shuting Cai, Kaori Nagatou, and Yoshitaka Watanabe: A Numerical Verification Method

for a System of FitzHugh-Nagumo Type,
Numerical Functional Analysis and
Optimization, Vol. 33, No. 10 (October
2012) pp. 1195-1220.

[学会発表](計 22 件)

渡部 善隆, 中尾 充宏: 無限次元線形作用素に対する精度保証付きノルム評価, 日本応用数学会 2012 年度年会講演予稿集, pp.231-232, 稚内全日空ホテル, 稚内市, 2012 年 8 月 28 日~9 月 2 日.

渡部 善隆, 中尾 充宏: 線形作用素に対する可逆性の検証と精度保証付きノルム評価, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, pp. 171-172, 2012 年 9 月 18 日~9 月 21 日.

渡部 善隆: Kolmogorov 問題の定常解に対する精度保証付き数値計算, 応用数学合同研究集会報告集 pp. 202-205, 龍谷大学, 2012 年 12 月 20 日~22 日.

渡部 善隆: 精度保証と HPC, 2013 年ハイパフォーマンスコンピューティングと計算科学シンポジウム(HPCS2013), シンポジウム論文集, pp. 120, 東京工業大学, 2013 年 1 月 15 日~16 日.[招待講演]

渡部 善隆, 小林 健太: Kolmogorov 問題の計算機援用証明における最大値ノルム評価の改善について, 日本応用数学会 2013 年研究部会連合発表会, 東洋大学, 2013 年 3 月 14 日~15 日.

木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏: 楕円型偏微分作用素の可逆性の検証について, 日本数学会 2013 年度年会, 京都大学, 2013 年 3 月 20 日~23 日.

渡部 善隆, 藤原 宏志, 中尾 充宏: exflib による平行 Poiseuille 流れの不安定性解析の高精度化, 日本応用数学会 2013 年度年会講演予稿集, pp.4-5, アクロス福岡, 福岡市, 2013 年 9 月 9 日~9 月 11 日.

木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏: 楕円型偏微分作用素に対する逆作用素評価の効率化, 日本応用数学会 2013 年度年会講演予稿集, pp.405-406, アクロス福岡, 福岡市, 2013 年 9 月 9 日~9 月 11 日.

渡部 善隆, 中尾 充宏: 無限次元非線形関数方程式に対する Newton 反復型計算機援用証明, 日本数学会 2013 年度秋季総合分

科会 応用数学分科会講演アブストラクト, pp. 195-198, 愛媛大学, 松山市, 2013 年 9 月 24 日~9 月 27 日.

渡部 善隆: 射影とその構成的誤差評価 -- 有限と無限を繋ぐもの--, RIMS 研究集会・応用数理と計算科学における理論と応用の融合, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 10 月 15 日~17 日.

渡部善隆, 木下 武彦, 木村 拓馬, 山本野人, 中尾 充宏: 2 階楕円型線形作用素の可逆性検証に関するいくつかの考察, 応用数学合同研究集会報告集 pp. 236-241, 龍谷大学, 2013 年 12 月 19 日~21 日.

Yoshitaka Watanabe: A comparison of computer-assisted proofs for the Kolmogorov problem, International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2014 (INVA2014), March 15-17, 2014, Waseda University, Tokyo, Japan.

[invited talk]

渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏: 線形作用素に対する可逆性の検証と精度保証付きノルム評価の改良について, 日本数学会 2014 年度年会, 学習院大学, 応用数学分科会講演アブストラクト, pp. 167-170. 2014 年 3 月 15 日~3 月 18 日.

渡部 善隆: 計算機援用証明による Orr-Sommerfeld 問題の安定性・不安定性解析, 日本数学会 2014 年度年会, 学習院大学, 応用数学分科会講演アブストラクト, pp. 179-188. 2014 年 3 月 15 日~3 月 18 日.[特別講演]

Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, Mitsuhiro T. Nakao: An alternative approach of invertibility verifications and norm estimations for linear elliptic operators, 日本応用数学会 2014 年研究部会連合発表会, 京都大学, 2014 年 3 月 19 日~20 日.

渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏: 2 階楕円型作用素における構成的 Laplacian ノルム評価, 日本応用数学会 2014 年度年会講演予稿集, 政策研究大学院大学, 東京都港区, 2014 年 9 月 3 日~9 月 5 日.

Yoshitaka Watanabe: Computer-assisted stability and instability proofs for the Orr-Sommerfeld problem, Institutskolloquien, Institut für Analysis, Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe, German,

September 18, 2014.

Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, and Mitsuhiro T. Nakao: Some remarks on the rigorous estimation of inverse linear elliptic operators, 16th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2014), September 21-26, 2014, University of Würzburg, Germany.

渡部 善隆: A numerical verification method for the Orr-Sommerfeld problem, 研究集会: 流体方程式の構造と特異性に迫る数値解析・数値計算, 名古屋大学, 2014年12月8日~9日.

渡部善隆: Orr-Sommerfeld 方程式の臨界 Reynolds 数に対する精度保証付き数値計算(上), 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2014年12月18日~20日.

渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏: 楕円型線形逆作用素評価の収束性について, 日本応用数理学会 2015 年研究部会連合発表会, 明治大学中野キャンパス, 2015年3月6日~7日.

渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏: 線形楕円型作用素に対する Laplacian ノルムの構成的評価, 日本数学会 2015 年度年会, 明治大学, 応用数学分科会講演アブストラクト, pp. 121-124. 2015年3月21日~24日.

〔図書〕(計2件)

Zin Arai, Takeshi Ogita, and Yoshitaka Watanabe (Guest Editors), Special Section on Recent Progress in Verified Numerical Computations, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Vol. 4, No. 1, pp. 1-110, January 2013.

日本応用数理学会監修: 応用数理ハンドブック, 偏微分方程式の精度保証(分担執筆), 朝倉書店, 2013年10月, B5判, 685頁.

〔産業財産権〕
(該当なし)

〔その他〕
ホームページ等
<http://yebisu.cc.kyushu-u.ac.jp/~watanabe/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡部 善隆 (Yoshitaka Watanabe) 九州大学・情報基盤研究開発センター・准教授
研究者番号: 90243972

(2) 研究分担者

長藤 かおり* (Kaori Nagatou) 九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授
研究者番号: 40326426

*) 申請時: 採択前に海外大学勤務になったため, 海外連携研究者として研究に参画.

(3) 連携研究者

中尾 充宏 (Mitsuhiro T. Nakao) 佐世保工業高等専門学校・校長
研究者番号: 10136418